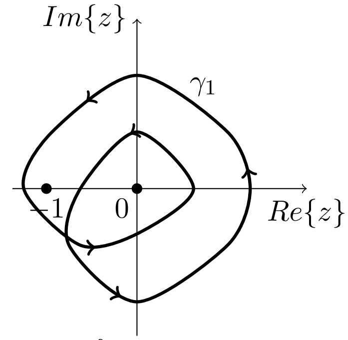
Funciones de variable compleja

Examen, 7 de Diciembre de 2017

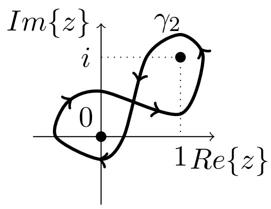
Apellidos **Nombres** **Nº de Cedula** **NºPrueba**

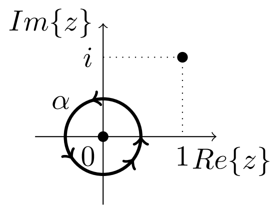
Ejercicio 1.

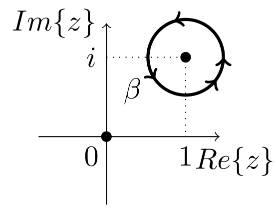


(a) Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}-\{0,-1\})$ tal que $\mathrm{Res}_f(0) = 6i$ y $\mathrm{Res}_f(-1) = 2i$.
Calcular $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)\,dz$, siendo γ_1 la curva de la figura.

(b) Sea $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C} - \{0, 1+i\})$ y α, β y γ_2 las curvas de las figuras. Calcular $\displaystyle\int_{\gamma_2} g(z)\,dz$, sabiendo que $\displaystyle\int_{\alpha} g(z)\,dz = 4\pi$ y $\displaystyle\int_{\beta} g(z)\,dz = 2\pi$.







Ejercicio 2.

Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n}\,dx$, con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Ejercicio 3.

Clasificar los ceros y las singularidades de $\displaystyle\frac{(z^2-1)e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)\,\mathrm{sen}\,z}$.

<u>Obs</u>: se debe dar el orden de los ceros y de los polos.

Ejercicio 4.

Sea $f(x+iy) = u(x,y)+iv(x,y)$ una función compleja definida en un abierto Ω. Demostrar que si u y v son diferenciables como funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ y además cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann, entonces f es holomorfa en Ω.

Ejercicio 5.

La solución a la ecuación diferencial $y''' + y'' + y = t - \cos t$ con las condiciones $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$ e $y''(0) = 0$ es:

<u>Obs</u>: La transformada de Laplace de t es $\dfrac{1}{s^2}$, la de $\cos t$ es $\dfrac{s}{s^2+1}$ y la de $\sin t$ es $\dfrac{1}{s^2+1}$. Además, puede ser de utilidad la siguiente igualdad: $2s^5 + 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 1 = (s^3+s^2+1)(2s^2+1)$.