Funciones de variable compleja

Examen, 7 de Diciembre de 2017

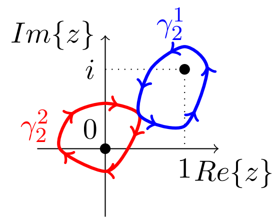
Resolución

Ejercicio 1.

(a) Usando el teorema de los residuos:

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 2\pi i\,(2\text{Res}_f(0) + \text{Res}_f(-1)) = -28\pi$$

(b) Podemos dividir a γ_2 en dos curvas como en el siguiente dibujo:



Así:

$$\int_{\gamma_2} g(z)\,dz = \int_{\gamma_2^1} g(z)\,dz + \int_{\gamma_2^2} g(z)\,dz$$

Como α es homotópica a γ_2^2 pero está orientada en sentido contrario, tenemos que:

$$\int_{\gamma_2^2} g(z)\,dz = -\int_{\alpha} g(z)\,dz = -4\pi$$

Análogamente, β es homotópica a γ_2^1 por lo que:

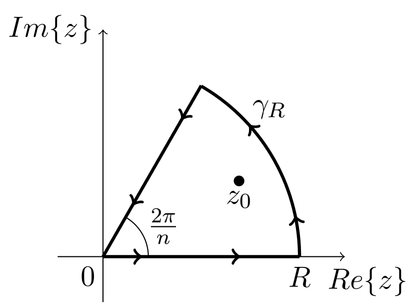
$$\int_{\gamma_2^1} g(z)\,dz = \int_{\beta} g(z)\,dz = 2\pi$$

Y por lo tanto:

$$\int_{\gamma_2} g(z)\,dz = -2\pi$$

Ejercicio 2.

La función compleja $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$ tiene n polos simples en $z_k = e^{i\left(\frac{\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$ con $k = 0, \ldots, n-1$. Tomando la curva γ_R de la figura (donde $R > 1$), resulta $\text{Ind}_{\gamma_R}(z_0) = 1$ e $\text{Ind}_{\gamma_R}(z_k) = 0$ para el resto de los polos.



Así, por el teorema de los residuos:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i \mathrm{Res}_f(z_0)$$

Como z_0 es un polo simple de f, su residuo es:

$$\lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{1+z^n} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{nz_0^{n-1}} = -\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}$$

donde para la primera igualdad se usó el teorema de L'Hopital. Así:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{i\pi}{n}}$$

Ahora, la integral sobre γ_R la podemos separar como sigue:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{[0,R]} f(z)\,dz + \int_{S_R} f(z)\,dz - \int_{\delta_R} f(z)\,dz$$

donde $[0,R]$ es el segmento que va de $(0,0)$ a $(R,0)$, S_R es el arco de circunferencia parametrizado por $S_R(t) = Re^{it}$ con $t \in [0, \frac{2\pi}{n}]$ y δ_R es el segmento parametrizado por $\delta_R(t) = te^{i\frac{2\pi}{n}}$ con $t \in [0,R]$.

Como:

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z^n} = 0$$

por el lema de deformación de curvas tenemos que:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

Además, si llamamos I a la integral que queremos calcular, tenemos que $\displaystyle\int_{[0,R]} f(z)\,dz \to I$ cuando $R \to +\infty$. Calculemos la integral sobre δ_R usando la parametrización:

$$\int_{\delta_R} f(z)\,dz = \int_0^R \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}}}{1+\left(te^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n}\,dt = e^{i\frac{2\pi}{n}} \int_0^R \frac{1}{1+t^n}\,dt \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} e^{i\frac{2\pi}{n}} I$$

Así, tenemos que:

$$-\frac{2\pi i}{n} e^{i\frac{\pi}{n}} = I\left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right) \Rightarrow I = \frac{2\pi i}{n} \frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1} = \frac{\pi}{n} \frac{2i}{e^{i\frac{\pi}{n}} - e^{-i\frac{\pi}{n}}} \Rightarrow I = \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

Ejercicio 3.

Estudiemos las singularidades de las funciones involucradas:

- $e^{\frac{1}{z}}$ tiene una singularidad esencial en 0. Esto se desprende del hecho de que si z tiende a 0 por los reales positivos, entonces $e^{\frac{1}{z}} \to \infty$ pero si z tiende a 0 por los reales negativos, entonces $e^{\frac{1}{z}} \to 0$.
- $z^2 - 1$ tiene dos ceros simples en 1 y en -1.
- $z + 1$ tiene un cero simple en -1.
- $\operatorname{sen} z$ se anula en $z = m\pi$ con $m \in \mathbb{Z}$. Estos ceros son simples ya que:

  $$\operatorname{sen} z = \pm(z - m\pi) \pm \frac{(z-m\pi)^3}{3!} \pm \frac{(z-m\pi)^5}{5!} + \dots$$

  en un entorno de $m\pi$. Que los sumandos sumen o resten dependen de si m es par o impar.

Así, $\dfrac{(z^2-1)e^{\frac{1}{z}}}{(z+1)\operatorname{sen} z}$ tiene un cero de orden 1 en 1 y polos de orden 1 en $m\pi$ con $m \neq 0$. En $z=-1$ hay una singularidad evitable, ya que el numerador tiene un cero de orden 1 y el denominador también. En $z=0$ hay una singularidad esencial.

Ejercicio 4.

Ver teórico.

Ejercicio 5.

Si llamamos $Y(s)$ a la transformada de Laplace de y, entonces usando las condiciones iniciales tenemos que la transformada de y' es $sY(s)$, la de y'' es $s^2Y(s)-2$ y la de y''' es $s^3Y(s)-2s$. Así, la ecuación diferencial en el dominio de Laplace queda:

$$s^3Y(s)-2s+s^2Y(s)-2+Y(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{s}{s^2+1}$$

Despejando $Y(s)$ llegamos a:

$$Y(s)=\frac{2s^5+2s^4+s^3+3s^2+1}{(s^3+s^2+1)s^2(s^2+1)}$$

Usando ahora la sugerencia $2s^5+2s^4+s^3+3s^2+1=(s^3+s^2+1)(2s^2+1)$ resulta:

$$Y(s)=\frac{2s^2+1}{s^2(s^2+1)}=\frac{s^2+s^2+1}{s^2(s^2+1)}=\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{s^2}$$

Y antitransformando llegamos a la solución:

$$y(t)=\sin t+t$$