Funciones de Variable Compleja

Examen Febrero 2017

Nombre: ______________________ Cédula: __________ N Parcial: ________

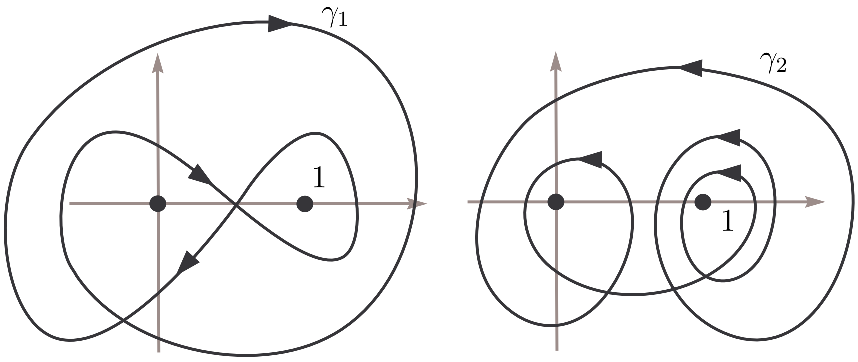
Se deben enunciar todos los teoremas o resultados utilizados con hipótesis y tesis y verificar que se está en las hipótesis antes de utilizarlo.

Ejercicio 1

1. Probar la fórmula de Cauchy.
2. Probar que si $f \in H(\mathbb{C})$ entonces es representable en series de potencia.
3. Probar que si f es entera ($f \in H(\mathbb{C})$) y acotada entonces es constante.
4. Sea $sen(z) = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Probar que $f(z) = sen(z)$, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, no está acotada.

Ejercicio 2

1. Probar el teorema de los Residuos.
2. Calcular
$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$
3. Sea $f \in H(\mathbb{C} - \{0,1\})$, donde 0 y 1 son polos de f. Se sabe que la integral de f sobre las curvas γ_1 y γ_2 (mostradas en la figura) valen 2i y 3 respectivamente. Calcular los residuos de f en 0 y 1.



Ejercicio 3

Sea D el disco unitario abierto y $f \in H(\mathbb{C})$.

1. Demostrar que si $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D$, entonces $|f(z)| \leq |z| \ \forall \ z \in D$ y $|f'(0)| \leq 1$.

2. Si además existe z_0 D tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ o $|f'(0)| = 1$, entonces existe c con módulo 1 tal que $f(z) = cz$.

Sugerencia: utilizar la función $f_1(z) = \begin{cases} f(z)/z & \text{si } z \in D - \{0\} \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$

Soluciones

Ejercicio 1

1. Ver teórico.

2. Ver teórico.

3. Ver teórico.

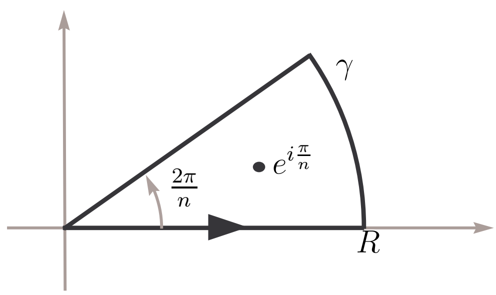
4. La función $sen(z)$ es holomorfa en todo $\mathbb{C}$. Si la misma fuera acotada, entonces por la parte anterior la misma debería ser constante. Se comprueba fácilmente que no es constante ($sen(0) \neq sen(1)$) y por lo tanto no puede estar acotada.

Ejercicio 2

1. Ver teórico.

2. Consideramos la curva γ como la figura y la función:

$$f(z) = \frac{1}{1 + z^n}$$



La función f es holomorfa en $\mathbb{C}$ menos en las raíces n-esimas de -1, que son polos de f de orden 1. Llamaremos $z_0 = e^{i\frac{\pi}{n}}$, al polo encerrado por la curva. Por el teorema de los residuos, sabemos que:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i Res(z_0)$$

donde el residuos es

$$Res(z_0) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{z - z_0}{1 + z^n} = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{1}{nz_0^{n-1}}$$

En la tercer igualdad se utilizó L'hospital. Se puede simplificar:

$$z_0^{n-1} = e^{i\frac{\pi}{n}(n-1)} = e^{i\pi(1-1/n)} = e^{i\pi}e^{-\frac{i}{n}} = -e^{-i\frac{\pi}{n}}.$$

Sustituyendo esto último en la fórmula del residuo:

$$Res(z_0) = -\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}.$$

Por lo tanto:

$$\int_\gamma f(z)dz = -2\pi i\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$$

Llamaremos γ_1 al segmento real de γ, γ_R al arco, y γ_2 al segmento restante. Donde $\gamma_1(t) = t$ y $-\gamma_2(t) = te^{i\frac{2\pi}{n}}$, con $t \in [0, R]$. Por otro lado, tenemos que:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz$$

Por la definición de integral:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^R \frac{dt}{1+t^n}$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = -\int_0^R \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}}}{1+t^n}dt = e^{i\frac{2\pi}{n}}\int_0^R \frac{dt}{1+t^n}.$$

Sustituyendo esto en la integral de γ:

$$(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}})\int_0^R \frac{dt}{1+t^n} + \int_{\gamma_R} f(z)dz = -2\pi i\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$$

Considerando el límite cuando R tiende a más infinito, dado que:

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{z}{1+z^n} = 0$$

por el lema de deformación de curvas se deduce que:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} f(z)dz = 0$$

Resultando:

$$(1 + e^{i\frac{2\pi}{n}})\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = -2\pi i\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = -\frac{2\pi i e^{i\frac{\pi}{n}}}{n(1+e^{i\frac{2\pi}{n}})}$$

$$= -\frac{\pi}{n}\frac{2i}{(e^{-i\frac{\pi}{n}} + e^{i\frac{\pi}{n}})} = -\frac{\pi}{n}\frac{1}{sen(\frac{\pi}{n})}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} = \frac{\pi}{nsen(\frac{\pi}{n})}$$

Observar que la integral da un número real y positivo, lo que es coherente con la integral calculada. En este razonamiento se asumió $n \geq 2$. Para el caso $n = 1$, se puede resolver directamente en los reales utilizando la primitiva.

3. Por el teorema de los residuos tenemos que:

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = 2\pi i(0.Res(1) - 2Res(0)) = 2i$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = 2\pi i(3Res(1) + 2Res(0)) = 3$$

   Tenemos un sistema de 2 ecuaciones y 2 incógnitas, que nos permite despejar las mismas obteniendo:

$$Res(0) = -\frac{1}{2\pi} \quad Res(1) = \frac{2-3i}{6\pi}$$

Ejercicio 3

1. La función f_1 sabemos que es holomorfa en todos lados menos $z = 0$. Sin embargo, dado que en cero tiene una singularidad evitable, por el teorema visto en clase sabemos que la misma se puede extender de forma holomorfa a todo el disco. Esto nos permite aplicar el teorema del módulo máximo, el cual nos indica que el máximo $|f_1(z)|$ será alcanzado en la circunferencia unitaria.

$$|f_1(z)|\Big|_{|z|=1} = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$$

   Dado que el máximo módulo deberá ser menor a 1, se tiene que:

$$|f_1(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1 \Rightarrow |f(z)| \leq |z|, \ \forall \ z \in D - \{0\}$$

$$|f_1(0)| = |f'(0)| \leq 1.$$

2. Que exista un z_0 tal que $|f(z_0)| = |z_0|$ o que $|f'(0)| = 1$ implica que $|f_1(z)|$ alcanza su máximo en el interior. Por el teorema del módulo máximo esto solo puede ocurrir si la función es constante. En particular, esta constante deberá tener módulo 1, ya que $|f_1(z_0)| = 1$ (o $|f_1(0)| = |f'(0)| = 1$).

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{z} = c \Rightarrow f(z) = cz.$$