Solución examen Julio 2016

Funciones de variable compleja

Nombre: ______________________ C.I.: __________ Nº Parcial: ______

Se deben enunciar todos los teoremas o resultados utilizados con hipótesis y tesis y verificar que se está en las hipótesis antes de utilizarlo.

1. *a*) (10 puntos) Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\gamma \subset \Omega$ una curva diferenciable. Probar que:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)|dt \leq \max_{z\in\gamma}\{|f(z)|\}.long(\gamma).$$

   Solución: Ver teórico

   b) Sea γ el rectángulo con vértices $\pm L(2)+\frac{\pi}{4}i$ y $\pm L(2)+\frac{3\pi}{4}i$ orientada en sentido antihorario.

   1) (3 puntos) Hallar γ_1 la imagen de γ al aplicarle la función e^z.
   2) (3 puntos) Hallar γ_2 la imagen de γ_1 al aplicarle la función z^2+1.
   3) (4 puntos) Demostrar la siguiente desigualdad:

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{e^{2z}+1}\right| \leq \frac{4}{3}\,(\pi + L(16)).$$

Solución:

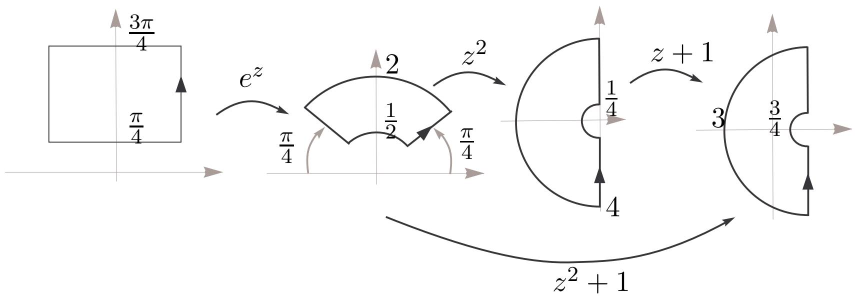

Figura 1. Ejercicio 1 parte b.1 y b.2

Para la parte b.3) utilizamos la acotación de la parte a). Como el mínimo de $|e^{2z}+1|$ es 3/4 (como se ve en la imagen), el máximo de $\left|\frac{1}{e^{2z}+1}\right|$ es 4/3. Por otro lado tenemos que $long(\gamma) = 2.\frac{\pi}{2} + 2(2L(2)) = \pi + L(2^4) = \pi + L(16)$. Sustituyendo estos valores en la acotación se obtiene la desigualdad que había que probar.

2. *a*) (7 puntos) Definir la función exponencial en $\mathbb{C}$ y una posible función raíz cuadrada en el plano.

   Solución: Sea $f(z)$ la función exponencial tal que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\}$, $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(cos(y) + isen(y))$.
   Sea $g(z)$ la raíz cuadrada de z tal que $g : \mathbb{C} \to I$, con $I = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geqslant 0\}$ y $g(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{i\frac{arg(z)_{(-\pi,\pi]}}{2}}$

b) (10 puntos) Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Demostrar que si u y v son diferenciables y cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann entonces f es holomorfa. Se podría haber razonado de forma análoga al caso del logaritmo, con un poco más de cuentas.

Solución: Ver teórico

c) (7 puntos) Estudiar donde son holomorfas las funciones de la parte a).

Solución: Con la función exponencial tenemos que $f(z) = e^x \cos(y) + ie^x sen(y)$ llamando $u(x,y) = e^x cos(y)$ y $v(x,y) = e^x sen(y)$ se cumple que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$.

$$\left.\begin{array}{ll} u_x = e^x cos(y) & u_y = -e^x sen(y) \\ v_x = e^x sen(y) & v_y = e^x cos(y) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}$$

Dado que u y v son diferenciables y cumplen las hipótesis del teorema demostrado en la parte b) se deduce que la función exponencial es holomorfa.

Para la raíz se cumple que $g(z) = e^{\frac{1}{2}L_{(-\pi.\pi]}(z)}$. Como el función logarítmica es holomorfa ne todos lados menos la semirecta de los reales negativos y la exponencial es holomorfa en todo el plano, se cumple que la función raíz es holomorfa en todo el plano menos la semirecta de los reales negativos.

3. (16 puntos) Demostrar el **Principio del argumento**.
Solución: Ver teórico

4. (15 puntos) Calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2}$.

Solución: Realizando el cambio de variable $u^2 = x$ se tiene que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}.$$

Llamando $f(z)$ a la función de la segunda integral, la misma tiene 4 polos simples en las raíces cuartas de 1. Consideraremos la curva γ como la semicircunferencia (S_R) en plano superior orientada en sentido antihorario y el segmento $[-R, R]$. Dado que la función f evaluada en los reales es par, se cumple que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2u}{1+u^4} = 2\int_0^{+\infty} \frac{2u}{1+u^4}.$$

Los polos en el interior de la curva son $e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $e^{i\frac{3\pi}{4}}$. Por el teorema de los residuos:

$$\int_\gamma \frac{2u^2}{1+u^4}du = 2\pi i(Res(e^{i\frac{\pi}{4}}) + Res(e^{i\frac{3\pi}{4}})) = 2\pi i\left(\frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2} + \frac{e^{-\frac{i3\pi}{4}}}{2}\right) = \sqrt{2}\pi$$

Como $\displaystyle\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$ por el lema de deformación de curvas tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}du = \sqrt{2}\pi \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}du = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

5. Sean $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\varphi_\alpha = \dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$ con $|\alpha| < 1$. Se considera Ω una región tal que $\overline{D} \subset \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(D) \subset D$, $f(\delta D) = \delta D$ y tiene un único cero de orden m en α.

a) (5 puntos) Demostrar que $\varphi_\alpha(\delta D) = \delta D$.

Solución:

$$|\varphi_\alpha(e^{i\theta})| = \left|\frac{e^{i\theta}-\alpha}{e^{i\theta}(e^{-i\theta}-\overline{\alpha})}\right| = 1$$

Donde en la última igualdad nos basamos en que el módulo de $e^{i\theta}$ es 1 y el módulo de un número y su conjugado es el mismo.

b) (5 puntos) Sea $H(z) : \Omega - \{\alpha\} \to \mathbb{C}$ tal que $H(z) = \dfrac{f(z)}{(\varphi_\alpha(z))^m}$. Probar que H tiene una singularidad evitable en α.

Sea $\tilde{H}$ la extensión holomorfa de H en Ω.

c) (5 puntos) Deducir que $\tilde{H}$ no tiene ceros en D.

Solución: Dado que f y $(\varphi_\alpha)^m$ tienen ambas un cero de orden m en α la división no tiene ni un polo ni un cero en ese punto y la función H se puede extender de forma holomorfa.

d) (3 puntos) Probar que $\tilde{H}(\delta D) \subset \delta D$.

Solución: $|H(\delta D)| = \dfrac{|f(\delta D)|}{|\varphi_\alpha(\delta D)|^m} = 1$.

e) (7 puntos) Deducir que $f(z) = c\varphi_\alpha(z)^m$ con $c \in \mathbb{C},\ |c| = 1$.

Solución: Como $\tilde{H}$ es una función holomorfa en Ω está en las hipótesis del principio del módulo máximo. Por le mismo sabemos que el máximo $|\tilde{H}|$ en $\overline{D}$ se da en δD. Por otro lado, por un corolario del principio dle módulo máximo sabemos que si la función no tiene ceros en un conjunto, el mínimo se da en el borde, es decir δD. En consecuencia, tanto el modulo máximo como el módulo mínimo se alcanzan en δD y vale 1. En consecuencia, la función $\tilde{H}$ debe ser constante.