Funciones de variable compleja

Examen, 15 de Febrero de 2016.

Apellidos	Nombres	Nº de Cedula	NºExamen

Problema 1.
(20 puntos.)

1) Defina transformación de Moebius.
2) Determine una trasformación de Moebius que transforme la recta $y = 0$ en la circunferencia de centro el origen y radio 1. ¿Cuál será la imagen del eje imaginario por esta transformación?

Problema 2.
(35 puntos.)

1) Enunciar y demostrar el principio del argumento.
2) Se considera la función $f(z) = z^2 + z$ y la curva $\mathcal{C}$ parametrizada por $\mathcal{C}(t) = 2e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi)$.
   a) Calcular
   $$\int_{\mathcal{C}} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$
   b) Llamemos γ a la curva parametrizada por $\gamma(t) = f[\mathcal{C}(t)]$, con $t \in [0, 2\pi)$.
      (i) Hallar los complejos $z \in \mathcal{C}$ para los que $\mathrm{Im}\{f(z)\} = 0$.
      (ii) Calcular $\mathrm{Re}\{f(z)\}$ para esos puntos.
      (iii) Realizar un bosquejo de la curva γ.

Recordar: $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$ y $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.

Problema 3.
(25 puntos)

1) Enunciar la formula de Cauchy para las derivadas. Demostrarla.
2) Sea $\mathcal{C}$ una curva cerrada simple, orientada positivamente, y a un punto interior a $\mathcal{C}$. Calcular

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{ze^z}{(z-a)^3} dz$$

Problema 4.
(20 puntos)

1) Probar que la transformada de Laplace de $f'(t)$ (asumiendo que $f'(t)$ y $f(t)$ son Laplace transformables) satisface la siguiente identidad:

$$(\mathcal{L}(f'))(p) = p(\mathcal{L}(f))(p) \ - \ f(0).$$

2) Usando el método de la transformada de Laplace resolver la ecuación diferencial $f'' - 4f' + 3f = 1$ con condiciones iniciales $f(0) = f'(0) = 0$.