Examen Diciembre 2016

Funciones de variable compleja

Nombre: ______________________________ C.I: ____________ N° Parcial: _______

Se deben enunciar todos los teoremas o resultados utilizados con hipótesis y tesis y verificar que se está en las hipótesis antes de utilizarlo.

Ejercicio 1

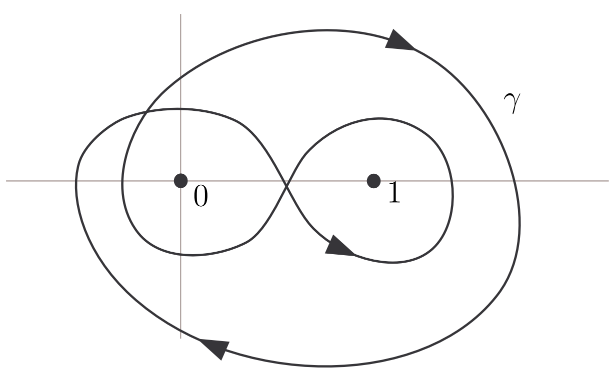
1. Sea Ω una región. Definir función holomorfa en Ω y probar la condición de Cauchy Riemman.
2. ¿Cuáles de las siguientes funciones son holomorfas? Justificar.
   a) $f(z) = e^z$.
   b) $f(z) = \overline{z}$.

Ejercicio 2

1. Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ tal que $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para toda curva cerrada incluida en $D(0,1)$. Probar que existe F primitiva de f.
2. Probar que si f tiene primitiva entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0$ para toda curva cerrada.
3. Justificar que la integral de cualquier polinomio sobre una curva cerrada vale cero.

Ejercicio 3

1. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia unitaria centrada en cero orientada en sentido antihorario. Calcular:
$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} + \frac{e^z}{z^2+2}\, dz.$$
2. Sea γ como indica la figura. Calcular:
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)}\, dz$$



Ejercicio 4

Sea $P(z) = z^6 + 3z^2 + i$.

1. Probar que los ceros de $P(z)$ están en el anillo $A = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 < |z| < 2\}$.
2. Calcular la cantidad de ceros de P con módulo menor a 1.

Ejercicio 5

1. Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfa. Probar que si los ceros de f acumulan en $D(0,1)$ entonces f es la función nula.
2. Sean $f, g : D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfas. Probar que si f y g coinciden en un conjunto A de infinitos puntos que acumula en $D(0,1)$ entonces f y g son la misma función.

Soluciones

Ejercicio 1

1. Ver teórico.
2. a) $e^z = e^{x+iy} = e^x cos(y) + ie^x sen(y)$. Sea $u(x,y) = e^x cos(y)$ y $v(x,y) = e^x sen(y)$, se cumple que $f(x+iy) = e^{x+iy} = u(x,y) + iv(x,y)$.

   $$\begin{array}{l} u_x = e^x cos(y) \\ u_y = -e^x sen(y) \\ v_x = e^x sen(y) \\ v_y = e^x cos(y) \end{array} \Rightarrow u_x = v_y,\ u_y = -v_x$$

   Dado que u, v son diferenciables y verifican la condición de Cauchy Riemman podemos afirmar que e^z es holomorfa en $\mathbb{C}$.

   b) $\overline{z} = x - yi$. Sea $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = -y$, se cumple que $f(x+iy) = \overline{x+iy} = u(x,y) + iv(x,y)$.

   $$\begin{array}{l} u_x = 1 \\ u_y = 0 \\ v_x = 0 \\ v_y = -1 \end{array} \Rightarrow \text{no se verifica la condición de Cauchy Riemman}$$

   Por la parte a $f(z) = \overline{z}$ no es holomorfa en ningún punto.

Ejercicio 2

1. Ver teórico.
2. Ver teórico.
3. Dado que los polinomios tiene primitiva, se puede deducir que la integral en cualquier curva cerrada en $\mathbb{C}$ da cero.

Ejercicio 3

1. $$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z} + \frac{e^z}{z^2+2}\, dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z} + \int_{\mathcal{C}} \frac{e^z}{z^2+2}\, dz = 2\pi i$$

   Donde en la primera integral se obtiene su valor rápidamente por la definición de índice. La segunda vemos que la función es holomorfa salvo en las raíces del denominador. Dado que la curva no encierra ningún polo se deduce que la integral vale cero.
2. $$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z-1)}\, dz = 2\pi i(-2)Res(0)$$

$$Res(0) = \frac{e^z}{z-1}\Big|_{z=0} = -1 \Rightarrow \int_\gamma \frac{e^z}{z(z-1)}\, dz = 4\pi i$$

Ejercicio 4

1. Sea $f(z) = z^6$ y $g(z) = 3z^2 + i$.
   <u>En $|z| = 2$:</u>
   $$\left.\begin{array}{l} |f(z)| = 64 \\ |g(z)| \leq 3|z|^2 + 1 = 12 + 1 = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow |f(z)| > |g(z)|,\ |z| = 2.$$
   Por el teorema de Rouche las funciones f y $f + g = P(z)$ tienen la misma cantidad de raíces en el interior de la circunferencia de radio 2. Dado que f tiene 6 raíces (raís cero con multiplicidad 6) P tiene sus 6 raíces dentro de esa cfa.
   <u>En $|z| = 1/2$:</u>
   $$\left.\begin{array}{l} |f(z)| = 1/64 \\ |g(z)| \geq |3|z|^2 - 1| = |3/4 - 1| = 1/4 \end{array}\right\} \Rightarrow |g(z)| > |f(z)|,\ |z| = 1/2.$$
   $g(z) = 3z^2 + i = 0 \iff z^2 = -i/3$. Las raíces del g deben tener módulo $1/\sqrt{3} > 1/2$.
   Por el teorema de Rouche las funciones g y $f + g = P(z)$ tienen la misma cantidad de raíces en el interior de la circunferencia de radio 1/2. Dado que g no tiene raíces en esa circunferencia P tampoco las tiene.
   Se concluye con esto que todos los ceros de P están en el anillo A.
2. <u>En $|z| = 1$:</u>
   $$\left.\begin{array}{l} |f(z)| = 1 \\ |g(z)| \geq |3|z|^2 - 1| = |3 - 1| = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow |g(z)| > |f(z)|,\ |z| = 1.$$
   Por el teorema de Rouche las funciones g y $f + g = P(z)$ tienen la misma cantidad de raíces en el interior de la circunferencia de radio 1. Dado que g tiene sus dos raíces en esta circunferencia P también tendrá dos raíces.

Ejercicio 5

1. Ver teórico.
2. Ver teórico.