# Funciones de variable compleja

Examen, 25 de julio de 2015.

| Apellidos | Nombres | Nº de Cedula | NºParcial |
|---|---|---|---|

## Problema 1.
**(20 puntos.)**

Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro $a$ y radio $r$.

a. Calcular $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-a}$ y deducir el valor de $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-w}$ para todo $w$ tal que $|a-w| < r$

b. Probar que $f(w) = \displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-w}dz$ con $|w-a| < r$

c. Calcular discutiendo según valores de $a \in \mathbb{C}$

$$\int_{|z-a|=1} \frac{z^2-2}{z-a}dz$$

En este ejercicio se pueden usar (enunciándolas) las propiedades del índice y se admiten el teorema de Cauchy en un disco y el siguiente corolario:
Sea $D$ un disco, $f \in \mathcal{H}(D - \{a\})$ y $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$ entonces $\int_\gamma f(z)dz = 0\ \forall\, \gamma \subset D$ cerrada tal que $a \notin \gamma$

## Problema 2.
**(20 puntos)**

Calcular, justificando

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)} \text{ y } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)(t^2+3)}$$

## Problema 3.
**(30 puntos.)**

Sea $f$ una función holomorfa en $D = \{z : |z| < 1\}$, tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1$, $\forall\, z \in D$.

a. Demuestre que se cumple que $|f(z)| \leq |z|$, $\forall z \in D$ y que $|f'(0)| \leq 1$.

b. Demuestre que si además se cumple que $|f(z)| = |z|$ para $z \in D - \{0\}$ o si $|f'(0)| = 1$ entonces existe una constante $\lambda \in \mathbb{C}$ de módulo 1 tal que $f(z) = \lambda z$ para $z \in D$.

Sugerencia: Considere la función $f_1(z) = \begin{cases} f(z)/z & , z \neq 0 \\ f'(0) & , z = 0. \end{cases}$ y aplique el teorema de módulo máximo.

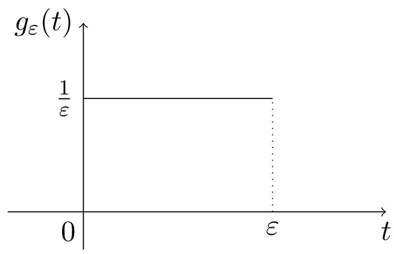
**Problema 4.**
**(30 puntos.)**

a. Demostrar que si $F(p)$ es la Transformada de Laplace de $f(t)$, entonces $F(p)e^{-t_0 p}$ es la Transformada de $f(t-t_0)$, donde $t_0 > 0$.

b. Hallar la Transformada de Laplace del escalón de Heaviside

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

c. Hallar la Transformada de Laplace de la función $g_\varepsilon(t)$ de la figura:




Sugerencia: escribir $g_\varepsilon(t)$ como una superposición de escalones de Heaviside y usar partes a y b.

d. Sea $G_\varepsilon(p)$ la Transformada de la función $g_\varepsilon(t)$ de la parte anterior. Calcular $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(p)$.