Funciones de variable compleja

Examen, 25 de julio de 2015

Resolución

Problema 1.

a. Parametrizamos la circunferencia como $z(t) = a + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Calculemos la integral:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{a + re^{it} - a}\, dt = i \int_0^{2\pi} \frac{re^{it}}{re^{it}}\, dt = i \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\pi i$$

Para calcular la integral $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-w}$, separamos en dos casos. Si $w = a$, nos queda la primera integral. Si $w \neq a$, escribimos:

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z-a+a-w} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \frac{w-a}{z-a}\right)} = \frac{1}{z-a} \frac{1}{1 - \frac{w-a}{z-a}}$$

Observemos que si $0 \neq |w-a| < r$, entonces $|\frac{w-a}{z-a}| < 1 \,\forall z \in \mathcal{C}$, ya que $|z-a| = r \,\forall z \in \mathcal{C}$. Entonces, si llamamos $u = \frac{w-a}{z-a}$, tenemos que $0 \neq |u| < 1$ y podemos escribir la serie de potencias:

$$\frac{1}{1 - \frac{w-a}{z-a}} = \frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n$$

Entonces:

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-a)} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

Por lo tanto:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-w} = \int_{\mathcal{C}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-a)} \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n\right] dz = \int_{\mathcal{C}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\right] dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathcal{C}} \frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}\, dz$$

El intercambio entre serie e integral puede hacerse ya que hay convergencia uniforme de la serie de potencias en el disco.

El término $(w-a)^n$ no depende de la variable de integración z, por lo que sale para afuera de la integral:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-w} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(w-a)^n \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-a)^{n+1}}\, dz\right]$$

La integral de $\frac{1}{(z-a)^{n+1}}$ puede calcularse por la definición, usando la prametrización de la circunferencia:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-a)^{n+1}}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{(a + re^{it} - a)^{n+1}} = \frac{i}{r^n} \left(-\frac{e^{-int}}{in}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{1 - e^{-2\pi n}}{nr^n} = 0$$

donde esa primitiva sólo vale si $n \neq 0$. En el caso $n = 0$ se tiene

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-a}\, dz = 2\pi i$$

por la parte anterior. Entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-w} = 2\pi i$$

Otra posible solución es aplicar el teorema del índice para ambas integrales.

b. Como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, es analítica, por lo que puede escribirse como una serie de potencias centradas en w:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-w)^n$$

Entonces, la integral a calcular queda:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (z-w)^n}{z-w}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-w)^{n-1}\right] dz$$

De nuevo, por la convergencia uniforme de la serie de potencias en el disco, podemos intercambiar serie e integral:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[a_n \int_{\mathcal{C}} (z-w)^{n-1}\,dz\right]$$

Si $n \neq 0$, la función $(z-w)^{n-1}$ tiene primitiva $\frac{(z-w)^n}{n}$, por lo que integra a 0 en cualquier curva cerrada. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\,a_0\int_{\mathcal{C}} (z-w)^{-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\,a_0\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-w} = \frac{1}{2\pi i}\,a_0 2\pi i = a_0$$

Ahora, sabemos que $a_0 = f(w)$, por lo que:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-w}\,dz = f(w)$$

Otra posible solución es considerar a función $g(z) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w}$ y aplicar el teorema de Cauchy-Goursat junto a la parte anterior.

c. Estamos integrando en la circunferencia de centro a y radio 1, por lo que podemos aplicar la parte anterior:

$$\int_{|z-a|=1} \frac{z^2-2}{z-a}dz = 2\pi i f(a)$$

con $f(z) = z^2 - 2$, por lo que:

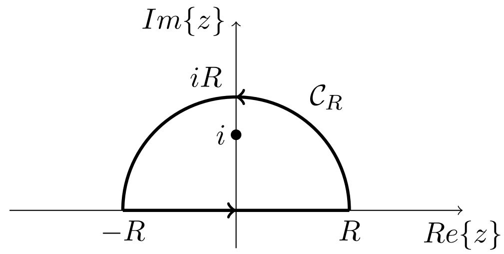
$$\boxed{\int_{|z-a|=1} \frac{z^2-2}{z-a}dz = 2\pi i(a^2-2)}$$

Problema 2.

Para la primera integral, aplicamos el cambio de variable $x = \sqrt{t} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$, por lo que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}(t+1)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x^2+1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{x^2+1}$$

donde la última igualdad vale ya que el integrando es par. Para calcular dicha integral, consideramos la función $f_1(z) = \frac{1}{z^2+1}$ y la curva γ_1 de la figura:



donde $R > 1$. Las singularidades de f_1 son $\pm i$, pero sólo i queda en el interior de γ_1, por lo que aplicando el teorema de los residuos resulta:

$$\int_{\gamma_1} f_1(z)\,dz = 2\pi i Res(f_1, i)$$

El residuo se calcula utilizando el hecho de que i es un polo simple:

$$Res(f_1, i) = \lim_{z\to i}(z-i)f_1(z) = \lim_{z\to i}\frac{z-i}{z^2+1} = \lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{2i}$$

Así:

$$\int_{\gamma_1} f_1(z)\,dz = \pi$$

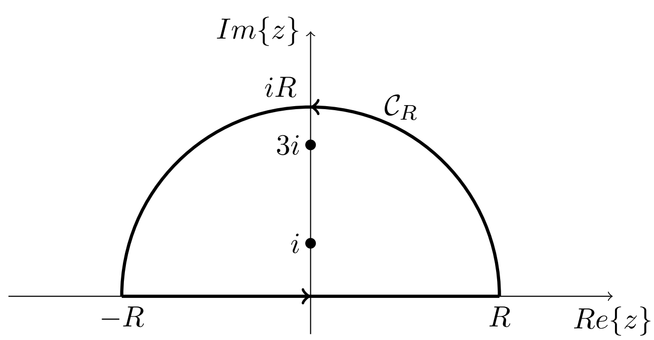
Ahora, la integral sobre γ_1 puede descomponerse como la integral sobre el segmento $[-R, R]$ y la integral sobre la media circunferencia $\mathcal{C}_R$:

$$\int_{\gamma_1} f_1(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f_1(z)\,dz + \int_{\mathcal{C}_R} f_1(z)\,dz$$

Cuando $R \to +\infty$, la integral sobre el segmento $[-R, R]$ converge a la integral buscada, mientras que por el lema de deformación de curvas la integral sobre $\mathcal{C}_R$ tiende a 0 (ya que $zf_1(z) \to 0$ cuando $z \to \infty$). Entonces:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)} = \pi}$$

Para la segunda integral, consideramos la función $f_2(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2+3)}$ y la curva γ_2:



donde $R > \sqrt{3}$. Las singularidades de f_2 son $\pm i$ y $\pm\sqrt{3}i$, pero sólo i y $\sqrt{3}i$ quedan en el interior de γ_2, por lo que aplicando el teorema de los residuos resulta:

$$\int_{\gamma_2} f_2(z)\,dz = 2\pi i[Res(f_2, i) + Res(f_2, \sqrt{3}i)]$$

Nuevamente, los polos son simples por lo que los residuos quedan:

$$\begin{aligned} Res(f_2, i) &= \lim_{z\to i}(z-i)f_2(z) = \lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z^2+1)(z^2+3)} = \lim_{z\to i}\frac{z-i}{(z+i)(z-i)(z^2+3)} = \frac{1}{4i} \\ Res(f_2, \sqrt{3}i) &= \lim_{z\to\sqrt{3}i}(z-\sqrt{3}i)f_2(z) = \lim_{z\to\sqrt{3}i}\frac{z-\sqrt{3}i}{(z^2+1)(z^2+3)} = \lim_{z\to\sqrt{3}i}\frac{z-\sqrt{3}i}{(z+\sqrt{3}i)(z-\sqrt{3}i)(z^2+1)} = -\frac{1}{4\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

Entonces:

$$\int_{\gamma_2} f_2(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4i}-\frac{1}{4\sqrt{3}i}\right) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Ahora, la integral sobre γ_2 puede descomponerse como la integral sobre el segmento $[-R,R]$ y la integral sobre la media circunferencia $\mathcal{C}_R$:

$$\int_{\gamma_2} f_2(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f_2(z)\,dz + \int_{\mathcal{C}_R} f_2(z)\,dz$$

Cuando $R\to+\infty$, la integral sobre el segmento $[-R,R]$ converge a la integral buscada, mientras que por el lema de deformación de curvas la integral sobre $\mathcal{C}_R$ tiende a 0 (ya que $zf_2(z)\to 0$ cuando $z\to\infty$). Entonces:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+3)} = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$$

Problema 3.

a. Como se sugiere, consideramos la función

$$f_1(z) = \begin{cases} f(z)/z & , z\neq 0 \\ f'(0) & , z=0. \end{cases}$$

Tomamos un $r>0$ tal que $0<r<1$. Consideramos ahora el disco $\overline{D_r}$, es decir, el disco cerrado de centro 0 y radio r. Por la definición de r se tiene que $\overline{D_r}\subset D$, por lo que f es holomorfa en $\overline{D_r}-\{0\}$. Además, es continua en $z=0$ ya que

$$\lim_{z\to 0} f_1(z) = \lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z} = f'(0) = f_1(0)$$

donde la penúltima igualdad se cumple porque $f(0)=0$. Entonces, f_1 tiene una extensión holomorfa en $\overline{D_r}$. Esta extensión es continua (por ser holomorfa), por lo que coincide en $z=0$ con $f_1(0)$. En conclusión, f_1 es holomorfa en $\overline{D_r}$.

Aplicando el principio del módulo máximo resulta que:

$$\max_{z\in\overline{D_r}}|f_1(z)| = \max_{z\in\partial D_r}|f_1(z)| = \max_{z\in\partial D_r}\frac{|f(z)|}{|z|} = \max_{z\in\partial D_r}\frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}$$

Ahora, haciendo $r\to 1$ resulta:

$$\sup_{z\in D}|f_1(z)|\leq 1$$

por lo que $|f_1(z)|\leq 1\,\forall z\in D$. Entonces, por la definición de f_1 se cumple que $|f(z)|\leq |z|$, $\forall z\in D$ y que $|f'(0)|\leq 1$.

b. Si además se cumple que $|f(z)| = |z|$ para algún $z \in D - \{0\}$ o si $|f'(0)| = 1$ entonces existe algún $z_0 \in D$ tal que $|f_1(z_0)| = 1$. Pero $|f_1(z)| \leq 1$ en D. Entonces f_1 tiene un máximo local en z_0. Esto implica, por el principio del módulo máximo, que $f_1(z)$ es igual a una constante λ en D. Pero $|f_1(z_0)| = 1$, por lo que $|\lambda| = 1$. Usando la definición de f_1 resulta entonces que $f(z) = \lambda z \, \forall z \in D - \{0\}$. Pero $f(0) = 0$, por lo que la igualdad vale $\forall z \in D$.

Problema 4.

a. Calculemos la Transformada de Laplace de $f(t - t_0)$:

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](p) = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T f(t-t_0) e^{-pt} \, dt$$

Aplicando el cambio de variable $u = t - t_0$, se tiene que:

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](p) = \lim_{T \to +\infty} \int_{-t_0}^T f(u) e^{-p(u+t_0)} \, du = \lim_{T \to +\infty} \int_{-t_0}^T f(u) e^{-pt_0} e^{-pu} \, du = e^{-pt_0} \lim_{T \to +\infty} \int_{-t_0}^T f(u) e^{-pu} \, du$$

Ahora, f es Laplace-Transformable, por lo que $f(t) = 0 \; \forall \, t < 0$. Por lo tanto, la última integral puede calcularse a partir de 0 (ya que $t_0 > 0$ y entonces $-t_0 < 0$):

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](p) = e^{-pt_0} \lim_{T \to +\infty} \int_0^T f(u) e^{-pu} \, du$$

El límite del término de la derecha no es otra cosa que la Transformada de Laplace de f, por lo que:

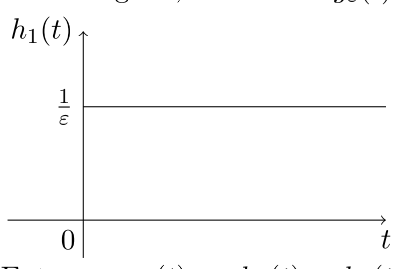
$$\mathcal{L}[f(t-t_0)](p) = e^{-pt_0} F(p)$$

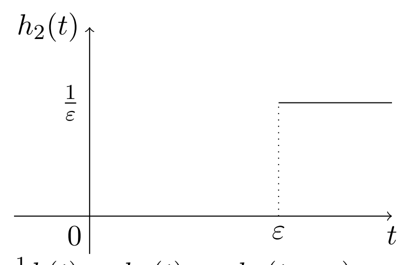
b. Llamemos $H(p)$ a la Transformada de $h(t)$. Calculemos $H(p)$ por la definición:

$$H(p) = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T h(t) e^{-pt} \, dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{-pt} \, dt = \lim_{T \to +\infty} \left(-\frac{e^{-pt}}{p} \right) \Bigg|_0^T = \lim_{T \to +\infty} \frac{1 - e^{-pT}}{p}$$

$$\Rightarrow \boxed{H(p) = \frac{1}{p}}$$

c. Como se sugiere, escribimos $g_\varepsilon(t)$ como la resta de los escalones de la figura:





Entonces $g_\varepsilon(t) = h_1(t) - h_2(t)$. Además $h_1(t) = \frac{1}{\varepsilon} h(t)$ y $h_2(t) = h_1(t - \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} h(t - \varepsilon)$. Entonces, llamando $G_\varepsilon(p)$ a la Transformada de $g_\varepsilon(t)$ y usando las partes anteriores resulta que:

$$G_\varepsilon(p) = \frac{1}{\varepsilon} \left(H(p) - e^{-p\varepsilon} H(p) \right) = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{1}{p} - e^{-p\varepsilon} \frac{1}{p} \right) \Rightarrow \boxed{G_\varepsilon(p) = \frac{1 - e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon}}$$

Otra posible forma de calcular la Transformada es por la definicón.

d. El límite puede calcularse aplicando L'Hopital:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(p) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1-e^{-p\varepsilon}}{p\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{pe^{-p\varepsilon}}{p} \Rightarrow \boxed{\lim_{\varepsilon\to 0} G_\varepsilon(p) = 1}$$