Funciones de variable compleja

Examen, 11 de febrero de 2015.

Problema 1.
(35 puntos)

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región (abierto, conexo) del plano y f una función analítica en Ω (i.e. Para todo $a \in \Omega$, existe $r > 0$ y una sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $f(z) = \sum_0^\infty c_n(z-a)^n, \quad \forall\, z \in D(a,r) = \{z \,/\, |z-a| < r\}$).
Sea $Z(f) = \{z \in \Omega \,/\, f(z) = 0\}$ el conjunto de ceros de de f.

a. Demostrar que si $Z(f)$ tiene algún punto de acumulación en Ω entonces $f(z) = 0\ \forall z \in \Omega$.
b. Sean f y g dos funciones analíticas en Ω tales que $f(z)g(z) = 0,\ \forall z \in \Omega$ probar que $f(z) = 0,\ \forall z \in \Omega$ ó $g(z) = 0,\ \forall z \in \Omega$

Problema 2.
(35 puntos)

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ una región, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $D = D(a,r) = \{z \in \Omega : |z-a| < r\}$ un disco incluido en Ω. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ son los ceros de f en D con multiplicidades $m_1, \ldots, m_r$ respectivamente.

a. Probar que
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} z^p \, dz = \sum_1^r m_i \alpha_i^p$$
b. Sea $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, calcular
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} \varphi(z) \, dz.$$
c. Discutir si $r \neq k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ el valor de:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D(0,r)} \frac{\cos z}{\sin z} e^{iz} \, dz.$$

Problema 3.
(30 puntos)

Calcular justificando cada paso y enunciando resultados que se utilicen:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^2}{x^2+1} dx$$