Funciones de variable compleja

Examen 11 de febrero 2015

Soluciones

Problema 1.

a. Ver Teorico.
b. Supongamos que existe un punto $z_0 \in \Omega$ en el que $f(z_0)g(z_0) = 0$ pero alguna de las dos funciones no es nula, por ejempolo asumamos que $g(z_0) \neq 0$. Como g es analítica y por lo tanto continua, existe un entorno D de z_0 en el que $g(z) \neq 0 \ \forall z \in D$ pero como $f(z)g(z) = 0 \ \ \forall z \in D$ debe ser $f(z) = 0 \ \forall z \in D$ en consecuencia $Z(f)$ acumula en Ω y por la parte anterior f debe ser nula en todo Ω

Problema 2.

a. Como f es holomorfa en D f' también lo es y por lo tanto $\frac{f(z)}{f'(z)}z^p$ es una función meromorfa en D cuyos polos son los puntos α_i (ceros de f) con multiplicidades m_i, $i = 1, \dots, r$.
En consecuencia, definiendo $\phi(z) = \frac{f(z)}{f'(z)}z^p$ se deduce del Teorema de los residuos que,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(z)}{f'(z)}z^p\,dz = \sum_{i=1}^{r} Res(\phi, \alpha_i)$$

Como f tiene un cero de orden m_i en α_i entonces existe un disco Δ_i tal que

$$f(z) = (z-\alpha_i)^{m_i}g_i(z) \quad \forall\, z \in \Delta_i,\ \text{con } g(z) \neq 0,\ \ \forall z \in \Delta_i$$

Derivando y dividiendo se tiene que

$$\frac{f'(z)}{f(z)}z^p = \left(\frac{m_i(z-\alpha_i)^{m_i-1}g_i(z) + (z-\alpha_i)^{m_i}g_i'(z)}{(z-\alpha_i)^{m_i}g_i(z)}\right)z^p = \left(\frac{m_i}{z-\alpha_i} + \frac{g'(z)}{g(z)}\right)z^p$$

Por lo tanto

$$\int_{\partial\Delta_i}\frac{f'(z)}{f(z)}z^p\,dz = \int_{\partial\Delta_i}\frac{m_i}{z-\alpha_i}z^p\,dz + \int_{\partial\Delta_i}\frac{g'(z)}{g(z)}z^p\,dz$$

Como g_i no se anula en el disco Δ_i se tiene que $g'(z)/g(z)z^p$ es holomorfa en Δ_i por lo que su integral sobre $\partial\Delta_i$ es nula. En consecuencia se tiene que

$$Res(\phi, \alpha_i) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_i}\frac{f'(z)}{f(z)}z^p\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_i}\frac{m_i z^p}{z-\alpha_i}dz = m_i\alpha_i^p$$

donde la última igualdad es consecuencia de la formula de Cauchy aplicada a la función $m_i z^p$.

b. Idem a la parte anterior solo que aplicado a la función $\frac{f'(z)}{f(z)}\phi(z)$ se obtiene que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f'(z)}{f(z)}\varphi(z)\,dz = \sum_{i=1}^{r} m_i\varphi(\alpha_i).$$

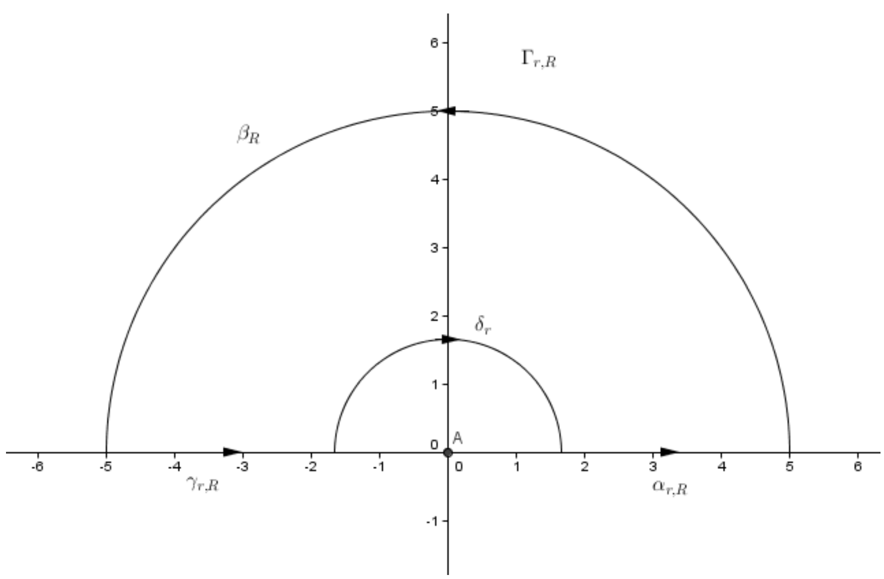
c. Aplicando la formula obtenida en la parte anterior con $f(z) = \sin z$ y $\varphi(z) = e^{iz}$. Como $\sin z$ tiene ceros simples en $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\int_{\partial D(0,r)} \frac{\cos z}{\sin z} e^{iz} dz = \sum_{k=0}^{ent(r)} e^{ik\pi} = \begin{cases} 1 \text{ si } ent(r) \text{ es par} \\ -1 \text{ si } ent(r) \text{ es impar} \end{cases}$$

Aqui $ent(r)$ es la parte entera de r.

Problema 3.

Vamos a extender la función $\frac{(log(x))^2}{x^2+1}$ a un abierto del plano complejo. Sabemos que no podemos extender el logaritmo a todo el plano, elegimos definirlo en el conjunto $\Omega = \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C}/Re(z) = 0, Im(z) \leq 0\}$. Ahora integramos la función $f(z) = \frac{(log(z))^2}{z^2+1}$ en la curva $\Gamma_{r,R}$ como se ve en la figura (r,R>0).



Cuando R es suficientemente grande y r suficientemente chico tenemos lo siguiente:

$$\int_{\Gamma_{r,R}} f(z)dz = \int_{\alpha_{r,R}} f(z)dz + \int_{\beta_R} f(z)dz + \int_{\gamma_{r,R}} f(z)dz + \int_{\delta_r} f(z)dz = 2\pi i Res(f,i)$$

Como el polo es simple nos queda

$$Res(f,i) = lim_{z\to i}(z-i)f(z) = lim_{z\to i}\frac{(log(x))^2}{z+i} = \frac{(log(i))^2}{2i} = \frac{-\pi^2}{8i}$$

y por lo tanto

$$\int_{\alpha_{r,R}} f(z)dz + \int_{\beta_R} f(z)dz + \int_{\gamma_{r,R}} f(z)dz + \int_{\delta_r} f(z)dz = 2\pi i Res(f,i) = \frac{-\pi^3}{4}$$

Estudiemos el tercer sumando del primer miembro de la igualdad. La curva $\gamma_{r,R}$ no es otra cosa que $-\alpha_{r,R}(t) = -t$ ($t \in [r,R]$) recorrida en sentido contrario. Por lo tanto

$$\int_{\gamma_{r,R}} f(z)dz = -\int_{-\alpha_{r,R}} f(z)dz = -\int_r^R \frac{(-1)(log(-t))^2}{(-t)^2+1}dt = \int_r^R \frac{(log(t)+i\pi)^2}{t^2+1}dt =$$

$$\int_r^R \frac{(log(t))^2}{t^2+1}dt + i\int_r^R \frac{2\pi log(t)}{t^2+1}dt + \int_r^R \frac{-\pi^2}{t^2+1}dt =$$

$$\int_r^R \frac{(log(t))^2}{t^2+1}dt + i\int_r^R \frac{2\pi log(t)}{t^2+1}dt - \pi^2(arct(R) - arct(r))$$

Por otro lado como $lim_{z\to+\infty} zf(z) = 0$ y $lim_{z\to 0} zf(z) = 0$, se tiene que $\int_{\beta_R} f(z)dz = 0$ y $\int_{\delta_r} f(z)dz = 0$, lo que nos deja la igualdad:

$$lim_{r\to 0, R\to+\infty}(\int_{\alpha_{r,R}} f(z)dz + \int_{\gamma_{r,R}} f(z)dz) = \frac{-\pi^3}{4}$$

Juntando todo tenemos

$$\frac{-\pi^3}{4} = lim_{r\to 0,R\to+\infty} 2\int_r^R f(z)dz +$$

$$lim_{r\to 0,R\to+\infty} i\int_r^R \frac{2\pi log(t)}{t^2+1}dt - lim_{r\to 0,R\to+\infty}\pi^2(arct(R) - arct(r)) = .$$

De igualar las partes reales de ambos miembros y calcular los límites resulta

$$\frac{-\pi^3}{4} = 2\int_0^{+\infty} f(z)dz - \frac{\pi^3}{2}$$

Y despejando obtenemos

$$\int_0^{+\infty} f(z)dz = \frac{\pi^3}{8}$$