Funciones de variable compleja

Examen, 10 de diciembre de 2015.

Apellidos	Nombres	Nº de Cedula	NºParcial

Problema 1.
(35 puntos.)

a. Sea f una función meromorfa definida en $\mathbb{H}^+ = \{z \in \mathbb{C} : Im(z) \geq 0\}$ con una cantidad finita de polos todos con parte imaginaria positiva, $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Probar que si

$$\lim_{z\to\infty} |zf(z)| = 0$$

entonces

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} f(x)dx = 2\pi i \sum_k Res(f, z_k)$$

b. Calcular,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

Problema 2.
(30 puntos)

a. Enunciar y demostrar el principio del módulo máximo.
b. Dada la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como $f(z) = z^2 - 3z + 2$, hallar el máximo de $|f(z)|$ en el disco unidad $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$.

Problema 3.
(35 puntos)

a. Hallar una función holomorfa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sabiendo que no es constante y que es de la forma $f(x+iy) = w(x)(g(y) - ig'(y))$ con $w(0) = g(0) = 1$ y $g'(0) = 0$, siendo w y g funciones reales.
b. Se considera la función $F(z) = f(z)(\cos z + i \operatorname{sen} z)$. Calcular

$$I_n = \int_{\mathcal{C}} \frac{F(z)}{z^n} dz$$

siendo $\mathcal{C}$ la circunferencia de centro el origen y radio R.

c. Calcular

$$\sum_1^\infty I_n$$