Funciones de variable compleja

Examen, 10 de diciembre de 2015

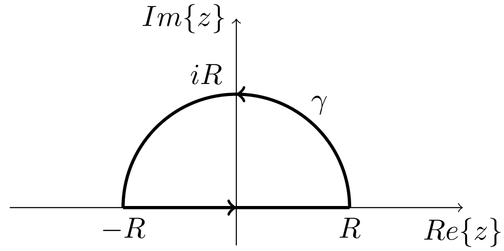
Resolución

Problema 1.

a. Como $f(z)$ tiene una cantidad finita de polos, tenemos que existe

$$M = \max_k \{|z_k|\}$$

Así, tomamos $R > M$ y consideramos la curva γ de la figura:



Por como elegimos R, tenemos que todos los polos de $f(z)$ quedan en el interior de γ. Entonces, usando el teorema de los residuos:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_k Res(f, z_k)$$

Ahora, dividimos la integral en γ como la integral en el segmento $[-R, R]$ más la integral en la media circunferencia $\mathcal{C}_R$:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{[-R,R]} f(z)dz + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_k Res(f, z_k)$$

Como el segmento $[-R, R]$ se encuentra en el eje real, tenemos que:

$$\int_{[-R,R]} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx$$

Además, como $|zf(z)| \to 0$ cuando $z \to \infty$, por el Lema de deformación de curvas la integral en $\mathcal{C}_R$ tiende a 0 cuando $R \to \infty$. Por lo tanto, tomando límite cuando $R \to \infty$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} 2\pi i \sum_k Res(f, z_k)$$

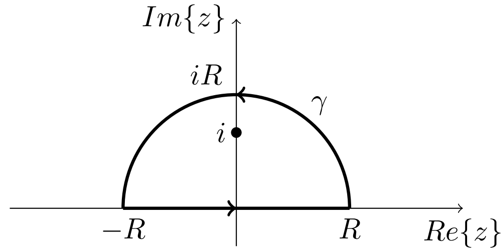
Y como el término de la derecha no depende de R, resulta lo que queríamos probar:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i \sum_k Res(f, z_k)$$

b. Consideramos la función compleja:

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

Entonces, f tiene polos con multiplicidad 2 en i y $-i$. Si consideramos la curva γ de la figura



con $R > 1$, entonces, por la parte anterior, dado que la impropia de $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ es convergente, tenemos que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = 2\pi i Res(f, i)$$

Como i es polo con multiplicidad 2, tenemos que

$$Res(f, i) = g'(i)$$

donde

$$g(z) = (z-i)^2 f(z) = \frac{(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{1}{(z+i)^2}$$

Entonces:

$$g'(z) = -\frac{2}{(z+i)^3} \Rightarrow g'(i) = \frac{1}{4i}$$

Así, la impropia de $-\infty$ a $+\infty$ de $f(x)$ resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Ahora $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ es par, por lo que

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \Rightarrow \boxed{\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\pi}{4}}$$

Problema 2.

a. Ver teórico.

b. Si escribimos $z = x + iy$, tenemos que:

$$f(z) = (x^2 - y^2 - 3x + 2) + iy(2x - 3)$$

Entonces:

$$|f(z)|^2 = (x^2 - y^2 - 3x + 2)^2 + y^2(2x-3)^2$$

Ahora, por el principio del módulo máximo, sabemos que el máximo de $|f(z)|$ se da en el borde de D, es decir, en la circunferencia de centro 0 y radio 1. Por lo tanto, nos centramos en los pares (x, y) tales que $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2$. Por lo tanto, la función a maximizar es:

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= (x^2 - 1 + x^2 - 3x + 2)^2 + (1 - x^2)(2x - 3)^2 \\ &= (2x^2 - 3x + 2)^2 + (1 - x^2)(2x - 3)^2 = 8x^2 - 18x + 10 \end{aligned}$$

con $x \in [-1, 1]$. En ese intervalo, la función toma su máximo en $x = -1$, por lo que el máximo del $|f(z)|$ se da en $z = -1$ (ya que si $x = -1$ entonces $y = 0$) y vale:

$$|f(-1)| = |1 + 3 + 2| = 6$$

Problema 3.

a. Como f es holomorfa, sus partes real $u(x,y)$ e imaginaria $v(x,y)$ cumplen con las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{cases}$$

Sabemos que $u(x,y) = w(x)g(y)$ y $v(x,y) = -w(x)g'(y)$, por lo que las ecuaciones de Cauchy-Riemann quedan:

$$\begin{cases} w'(x)g(y) &= -w(x)g''(y) \\ w(x)g'(y) &= w'(x)g'(y) \end{cases}$$

Como f no es constante por hipótesis, u y v tampoco lo son, por lo que ni $w'(x)$ ni $g'(y)$ son la función nula. Entonces, de la segunda ecuación resulta:

$$w(x) = w'(x) \Rightarrow w(x) = Ke^x$$

Imponiendo $w(0) = 1$ obtenemos $K = 1$ y por lo tanto $w(x) = e^x$. Sustituyendo la $w(x)$ hallada en la primera de las ecuaciones de Cauchy-Riemann, resulta:

$$g(y) = -g''(y) \Rightarrow g(y) = A\cos y + B\sin y$$

Imponiendo $g(0) = 1$ y $g'(0) = 0$ obtenemos $A = 1$, $B = 0$, por lo que $g(y) = \cos y$. Finalmente, la función f resulta:

$$\boxed{f(z) = e^x(\cos y + i\operatorname{sen} y) = e^z}$$

b. Por el teorema integral de Cauchy tenemos que:

$$I_n = \int_{\mathcal{C}} \frac{F(z)}{z^n}dz = \frac{2\pi i}{n!}F^{(n-1)}(0)$$

Tenemos que $F(z) = e^z(\cos z + i\operatorname{sen} z)$. Recordemos la definición de seno y coseno complejo:

$$\begin{cases} \cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ \sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\cos z + i\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} + \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2} = e^{iz}$$

Y entonces:

$$F(z) = e^z e^{iz} = e^{(i+1)z} \Rightarrow F^{(n-1)}(0) = (i+1)^{n-1}$$

Finalmente:

$$\boxed{I_n = \frac{2\pi i}{n!}(i+1)^{n-1}}$$

c. Tenemos que la serie de los I_n es igual a:

$$\sum_1^\infty I_n = \sum_1^\infty \frac{2\pi i}{n!}F^{(n-1)}(0) = 2\pi i \sum_1^\infty \frac{F^{(n-1)}}{n!}(0) = 2\pi i\left[F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \frac{F^{(3)}(0)}{3!} + \dots\right]$$

La última sumatoria no es más que la serie de potencias de la F centrada en 0 y evaluada en $z = 1$. Como F es holomorfa, es analítica, por lo que la serie de potencias centrada en 0 y evaluada en $z = 1$ es igual a $F(1)$. Entonces:

$$\boxed{\sum_{1}^{\infty} I_n = 2\pi i F(1) = 2\pi i e^{i+1}}$$