Funciones de variable compleja

Examen, 24 de julio de 2014

Resolución

Problema 1.

a. Ver teórico.

b. Ver teórico.

c. Para que $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, sus partes real e imaginaria (u y v, respectivamente) deben verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

Calculemos esas derivadas:

$$\begin{aligned} u_x &= 2x+1 \\ u_y &= -2y-1 \\ v_x &= h_x \\ v_y &= h_y \end{aligned}$$

Imponiendo las ecuaciones de Cauchy-Riemann resulta:

$$\begin{aligned} h_x(x,y) &= 2y+1 \Rightarrow h(x,y) = 2xy + x + g(y) \\ h_y(x,y) &= 2x+1 \end{aligned}$$

Derivando la primer igualdad respecto a y y sustituyendo en la segunda, se tiene que:

$$h_y(x,y) = 2x+1 = 2x + g'(y) \Rightarrow g'(y) = 1 \Rightarrow g(y) = y + k$$

Entonces, F queda:

$$F(x+iy) = x^2 + x - y^2 - y + i(2xy + x + y) + c_1$$

donde $c_1 = c + ik$. Imponiendo $F(0) = 0$ resulta $c_1 = 0$, por lo que F finalmente resulta:

$$\boxed{F(x+iy) = x^2 + x - y^2 - y + i(2xy + x + y)}$$

d. Parametrizamos la cfa de centro 0 y radio 1 como $z(t) = e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces la integral queda

$$\int_C \frac{F(z)\overline{z}}{z-1/2}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{F(e^{it})e^{-it}}{e^{it}-1/2} ie^{it}\,dt = \int_0^{2\pi} \frac{F(e^{it})}{e^{it}-1/2} i\,dt$$

Ahora, observemos que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{F(e^{it})}{e^{it}-1/2} i\,dt = \int_C \frac{F(z)}{z(z-1/2)}\,dz$$

Así, la integral a calcular es

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)\overline{z}}{z-1/2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z(z-1/2)}\,dz$$

Como $F \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y C no pasa por 0 ni por 1/2 podemos aplicar el teorema de los residuos:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)}{z(z-1/2)}\,dz = Res(G,0) + Res(G,1/2)$$

donde

$$G(z) = \frac{F(z)}{z(z-1/2)}$$

Ahora, 0 es cero de $F(z)$, por lo que es una singularidad evitable de G y $Res(G,0) = 0$. Para calcular el residuo en 1/2 usamos el hecho de que es un polo simple, por lo que:

$$Res(G,1/2) = \lim_{z\to 1/2}(z-1/2)G(z) = \lim_{z\to 1/2}\frac{F(z)}{z} = 2F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} + i$$

Así, la integral que queremos calcular resulta

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{F(z)\overline{z}}{z-1/2}\,dz = \frac{3}{2} + i}$$

Problema 2.

a. Las singularidades de f son 0, $-1+i$ y $-1-i$. Las últimas 2 son polos, ya que $\lim\limits_{z\to -1\pm i} f(z) = \infty$. Además, son polos de orden 1 porque $\lim\limits_{z\to -1\pm i}[z-(-1\pm i)]f(z)$ da finito en cualquiera de los dos casos.

Por otro lado, 0 es una singularidad escencial de f. Para verlo, hay que probar que no existe $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$. Esto puede hacerse estudiando el límite cuando $z \to 0^+$ y cuando $z \to 0^-$:

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 0^+} f(z) &= \lim_{z\to 0^+}\frac{e^{1/z}}{z^2+2z+2} = \infty \\
\lim_{z\to 0^-} f(z) &= \lim_{z\to 0^-}\frac{e^{1/z}}{z^2+2z+2} = 0
\end{aligned}$$

b. Por el teorema de los residuos (asumiendo que la curva gira alrededor de $-1+i$ en sentido antihorario, por lo que alrededor de $-1-i$ lo hace en sentido horario):

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i\,[Res(f,-1+i) - Res(f,-1-i)]$$

Calculemos los residuos, usando que ambos son polos de orden 1:

$$Res(f,-1+i) = \lim_{z\to -1+i}[z-(-1+i)]\frac{e^{1/z}}{(z-(-1+i))(z-(-1-i))} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(1+i)}}{2i}$$

$$Res(f,-1-i) = \lim_{z\to -1-i}[z-(-1-i)]\frac{e^{1/z}}{(z-(-1+i))(z-(-1-i))} = -\frac{e^{\frac{1}{2}(-1+i)}}{2i}$$

Entonces la integral queda:

$$\boxed{\int_C f(z)\,dz = \pi\left[e^{-\frac{1}{2}(1+i)} + e^{\frac{1}{2}(-1+i)}\right]}$$

Problema 3.

a. Suponemos que f no tiene raíces en D. Entonces la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ es holomorfa en Ω. Además $g(0) = \frac{1}{f(0)} = 1$ y $|g(z)| < \frac{1}{2}$ en el borde del disco, lo que es absurdo por el principio del módulo máximo.

b. Si f es no constante y holomorfa en Ω y $|f| = K$ en el borde del disco, entonces por el principio del módulo máximo $|f(z)| < K$ en el interior del disco. Si suponemos que f no tiene raíces, entonces $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ es holomorfa en Ω. Pero $|g(z)| = \frac{1}{K}$ en el borde del disco y $|g(z)| > \frac{1}{K}$ en el interior del mismo, lo que contradice el principio del módulo máximo.

Problema 4.

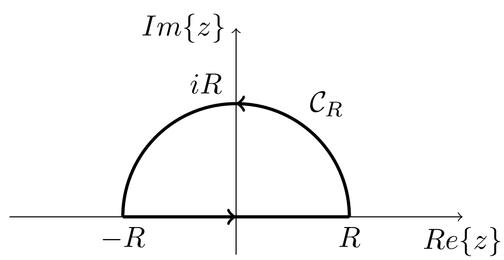
Apliquemos el cambio de variable $u = \sqrt{x} \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{du}{u^4+1}$$

Ahora, la función $\frac{1}{u^4+1}$ es par, por lo que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^4+1}$$

Para calcular esa integral, consideramos la función compleja $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ y la curva γ de la figura:



donde $R > 1$. Los polos de f están en $e^{\frac{i(2k+1)\pi}{4}}$, por lo que los únicos que quedan en el interior de γ son $e^{\frac{i\pi}{4}}$ y $e^{\frac{i3\pi}{4}}$. Entonces, por el teorema de los residuos:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left[Res\left(f, e^{\frac{i\pi}{4}}\right) + Res\left(f, e^{\frac{i3\pi}{4}}\right)\right]$$

Si a es un polo simple de f sabemos que su residuo puede calcularse como:

$$Res(f,a) = \frac{1}{\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\Big|_{z=a}}$$

Entonces para este caso:

$$Res(f,a) = \frac{1}{4a^3}$$

Y por lo tanto:

$$\begin{aligned} Res\left(f, e^{\frac{i\pi}{4}}\right) &= \frac{1}{4e^{\frac{i3\pi}{4}}} = \frac{e^{-\frac{i3\pi}{4}}}{4} = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \\ Res\left(f, e^{\frac{i3\pi}{4}}\right) &= \frac{1}{4e^{\frac{i\pi}{4}}} = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{4} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Así, la integral sobre γ resulta:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{-1-i}{4\sqrt{2}} + \frac{1-i}{4\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Ahora, la integral sobre γ puede descomponerse como la integral sobre el segmento $[-R, R]$ y la integral sobre la media circunferencia $\mathcal{C}_R$:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{[-R,R]} f(z)\,dz + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz$$

Cuando $R \to +\infty$, la integral sobre el segmento $[-R, R]$ converge a la integral buscada, mientras que por el lema de deformación de curvas la integral sobre $\mathcal{C}_R$ tiende a 0. Entonces:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(x^2+1)} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}}$$