Funciones de variable compleja

Examen, 10 de diciembre de 2014.

Soluciones

Problema 1.

(15 puntos)

a. Recordemos que si f es holomorfa cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

Luego tenemos $u_{xx} = v_{yx}$ y $u_{yy} = -v_{xy}$, por lo que u satisface la ecuación de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

De forma análoga tenemos $v_{xx} + v_{yy} = -u_{yx} + u_{yx} = 0$.

b. Si existiera tal f por la parte anterior la función u debería ser armónica. Hallamos u_{xx} y u_{yy}:

$$u_{xx} = \frac{y^2 e^{y/x}}{x^4} + \frac{2ye^{y/x}}{x^3}$$

$$u_{yy} = \frac{e^{y/x}}{x^2}$$

Es claro que $u_{xx} + u_{yy} \neq 0$ por lo que u no es armónica y por lo tanto no puede ser parte real de una función holomorfa.

Problema 2.

(30 puntos)

a. Ver teórico.
b. Ver teórico.
c. Consideramos una transformación de Möbius φ que lleve el semiplano $Re(z) < K$ en el disco $D(0,1)$ (se puede obtener eligiendo correctamente tres puntos en la recta $Re(z) = K$ y tres en S^1). Tenemos que $\varphi \circ f : D(a,r) - \{a\} \to D(0,1)$ es holomorfa y acotada, por la parte anterior se extiende a una función holomorfa $g : D(a,r) \to \mathbb{C}$ con $g(D(a,r)) \subset \bar{D}(0,1)$. Por el principio del módulo máximo sabemos que el máximo de $|g|$ no puede darse en el interior, por lo que $g(a) \notin S^1$. Luego $\varphi^{-1} \circ g$ es una función holomorfa definida en $D(a,r)$. Además tenemos que se cumple $\varphi^{-1} \circ g(z) = f(z)\ \forall z \neq a$, es decir que encontramos una extensión holomorfa de f a $D(a,r)$ y por lo tanto la singularidad es evitable.

Problema 3.

(30 puntos)

a. Ver teórico.
b. Ver teórico.
c. Consideramos las funciones $g(z) = -z^4$ y $h(z) = -10$. Usaremos el teorema de Rouché para probar que todas las raíces de $f(z) = z^4 - 8z + 10$ están en $D(0,3)$. Primero tomamos la curva $\partial D(0,3)$ y verificamos que f no tiene raíces sobre ella: Si existe una raíz z con $|z| = 3$ tenemos

$$0 = |f(z)| = |z^4 - 8z + 10| \geq |z^4| - |8z| - 10 = 81 - 24 - 10$$

Lo que es absurdo. Es claro también que g tiene todas las raíces fuera de $\partial D(0,3)$ (cero es raíz cuarta). Como f y g no tienen polos solo resta verificar la condición del teorema de Rouché:

$$|f(z) + g(z)| = |z^4 - 8z + 10 - z^4| = |-8z + 10| \leq |-8z| + |10| = 34 < 81 = |-z^4|$$

$$\leq |f(z)| + |g(z)| \quad \forall z \in \partial D(0,3)$$

y luego tenemos que la f tiene 4 raíces en $D(0,3)$.

Por otro lado tenemos que si $|z| = 1$ entonces $|f(z)| \geq 10 - |z^4| - |-8z| = 1$ por lo que f no tiene raíces en $S^1 = \partial D(0,1)$. Tampoco h tiene raíces en S^1 pues ni siquiera tiene raíces. Nuevamente verificamos que se cumpla la condición del teorema de Rouché:

$$|f(z) + h(z)| = |z^4 - 8z| \leq |z^4| + |-8z| = 9 < 10 = |h(z)| \leq |f(z)| + |h(z)| \; \forall z \in S^1$$

Entonces f no tiene raíces en $D(0,1)$ y por lo tanto tiene cuatro raíces en el anillo $D(0,3) - \bar{D}(0,1)$.

Problema 4.

(25 puntos) Primero observamos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xsen(x)}{x^2+1} dx = \frac{1}{2i} \left(\int_0^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1} dx - \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ix}}{x^2+1} dx \right)$$

Observamos que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+1} dx = lim_{R \to +\infty} \int_{\alpha_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+1} dz$$

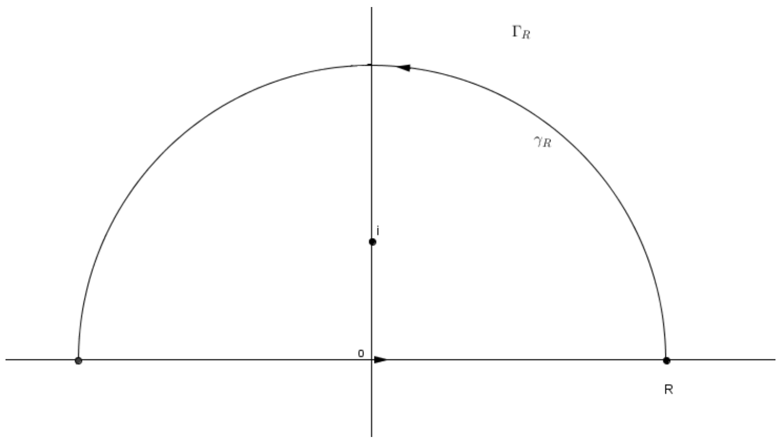
y

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-ix}}{x^2+1} dx = lim_{R \to +\infty} \int_{\beta_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+1} dz$$

Donde $\alpha_R(t) = t$ y $\beta_R(t) = -t$. Es decir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xsen(x)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2i} lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}dz$$

Para averiguar cuanto vale nuestra integral vamos a considerar la curva Γ_R compuesta por las curvas $[-R, R]$ y $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_R(t) = Re^{\pi i t}$.



$$lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}dz = lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}dz + lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}dz$$

El segundo sumando es cero por el lema de Jordan ya que $lim_{z\to\infty} \frac{z}{z^2+1} = 0$. Y como $\frac{ze^{iz}}{z^2+1}$ tiene polos en i y $-i$ el primer miembro de la igualdad es $2\pi i Res(i)$. Calculemos el residuo en i, como es simple nos queda igual a $lim_{z\to i}(z-i)\frac{ze^{iz}}{z^2+1} = lim_{z\to i}\frac{ze^{iz}}{z+i} = \frac{ie^{-1}}{2i} = \frac{1}{2e}$.

Es decir que

$$\int_0^{+\infty} \frac{xsen(x)}{x^2+1}dx = \frac{1}{2i} lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} \frac{ze^{iz}}{z^2+1}dz = \frac{1}{2i} 2\pi i \frac{1}{2e} = \frac{\pi}{2e}$$