Examen de Funciones de Variable Compleja.

Julio de 2013.

Núm. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Nota: Cada parte vale 10 puntos, con un máximo de 100. El mínimo para aprobar es 50 puntos. La duración del examen es de 3 horas y media.

1. *a*) Sea $z = f(w) = (1+w)/(1-w)$. Hallar la imagen por f de todos los complejos w que están en el interior del disco de centro 0 y radio 1.

   b) Hallar todos los complejos z tales que $z^3 = 8\,i$. Encontrar las partes reales e imaginarias de todas las soluciones z. Podrá usarse la siguiente tabla:

   $$\cos(\pi/3) = \operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2, \quad \cos(\pi/6) = \operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2.$$

   c) Hallar algún complejo w tal que $\Big((1+w)/(1-w)\Big)^3 = 8\,i$.

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto no vacío. Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ continua **no** necesariamente holomorfa en Ω y sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ una curva diferenciable parametrizada con $z = z(t), \quad a \le t \le b$.

   a) Definir los números complejos $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ e $\displaystyle\int_\gamma |f(z)|\,|dz|$.

   b) Enunciar y demostrar la regla de Barrow.

   c) Calcular $\int_\gamma e^z\,dz$ donde γ es la curva parametrizada por

   $$z(t) = -e^{it} + i\operatorname{sen} t \qquad 0 \le t \le \pi.$$

   d) Sea $\mathcal{A}$ el arco de cuarto de circunferencia de centro en el origen y radio 2, orientado con extremo inicial en $z_1 = 2$ y extremo final en $z_2 = 2i$, recorrido una sola vez. Probar que $\displaystyle\left|\int_{\mathcal{A}} \frac{dz}{z^2+1}\right| \le \frac{\pi}{3}$.
   Sugerencia: Primero probar que $|z^2+1| \ge 3$ para todo $z \in \mathcal{A}$ usando la siguiente propiedad triangular $|u-w| \ge |u| - |w|$.

3. Sea la función $f(z) = \dfrac{50}{(z^2+1)(z-2)^2}$.

   a) Encontrar los polos de $f(z)$ y sus órdenes

   b) Hallar el residuo de f en cada polo.

   c) Sea γ una curva cerrada diferenciable a trozos tal que $\operatorname{Ind}_\gamma(i) = 0, \operatorname{Ind}_\gamma(-i) = -1$ e $\operatorname{Ind}_\gamma(2) = +1$. Calcular $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$.