Soluciones del Examen de Funciones de Variable Compleja 25/07/2013

Ej. 1 parte a) Elegimos tres puntos de la circunferencia de centro 0 y radio 1, y una orientación; por ejemplo $w_1 = 1,\ w_2 = i$ y $w_3 = -1$, con la orientación w_1, w_2, w_3 (sentido antihorario). El disco es la región a la izquierda, al recorrer la circunferencia con esa orientación. Entonces la imagen del disco será la región a la izquierda de la curva imagen por f de la circunferencia. Esta curva será recta o circunferencia pues f es de Moebius. Esta curva (recta o circunferencia) contiene a las imágenes de w_1, w_2, w_3 que son $z_1 = f(w_1) = f(1) = \infty$, $z_2 = f(w_2) = f(i) = (1+i)/(1-i) = (1+i)^2/2 = i$ y $z_3 = f(w_3) = f(-1) = 0$. Entonces la curva (recta o circunferencia) es la recta (pues pasa por ∞ en la esfera de Riemann) que contiene a $z_2 = i$ y a $z_3 = 0$. Es el eje imaginario, recorrido de $z_1 = \infty$, pasando luego por $z_2 = 1$ y luego por $z_3 = 0$. Entonces el eje imaginario está recorrido de arriba hacia abajo. La región que queda a su izquierda es el semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$. Conclusión: la imagen pedida es el semiplano $\mathrm{Re}(z) > 0$.

Ej. 1 parte b) Las raíces cúbicas complejas de $8i$ son tres en el plano complejo que tienen módulo $\sqrt[3]{|8i|} = \sqrt[3]{8} = 2$ (raíz cúbica real positiva de 8). Los argumentos de las raíces cúbicas complejas de $8i$ son $(\mathrm{Arg}(i) + 2k\pi)/3$ para $k \in \mathbb{Z}$. Eso da:

$$\frac{\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{2}$$

Luego las tres raíces cúbicas pedidas son:

$$z_1 = 2e^{\imath\pi/6} = 2(\cos\pi/6 + i \operatorname{sen}\pi/6) = \sqrt{3} + i,$$

$$z_2 = 2e^{i(\pi-\pi/6)} = 2(\cos(\pi - \pi/6) + i \operatorname{sen}(\pi - \pi/6)) = 2(-\cos\pi/6 + i\operatorname{sen}\pi/6) = -\sqrt{3} + i,$$

$$z_3 = 2e^{i(2\pi-\pi/2)} = 2e^{-\pi/2} = -2i.$$

Ej. 1 parte c) Debemos hallar algún complejo w tal que $\Big(f(w)\Big)^3 = 8i$. Llamando $z = f(w)$, debemos hallar algún complejo w tal que $z = f(w)$ y $z^3 = 8i$. Empezamos eligiendo una de las raíces cúbicas z de $8i$ halladas en la parte b), por ejemplo $z = -2i$. Ahora tenemos que resolver la ecuación

$$f(w) = -2i, \quad \frac{1+w}{1-w} = -2i, \quad 1 + w = -2i + 2i\, w, \quad w(1-2i) = -(1+2i),$$

$$w = \frac{-(1+2i)}{1-2i} = \frac{-(1+2i)^2}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\, i$$

Ej. 2 parte a)

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(z(t)) \cdot \dot{z}(t)\, dt, \quad \int_\gamma |f(z)|\, |dz| := \int_a^b |f(z(t))| \cdot |\dot{z}(t)|\, dt,$$

donde $z(t),\ \ a \le t \le b$ es una parametrización de γ que da la orientación de la curva.

Ej. 2 parte b) La regla de Barrow establece lo siguiente:

Hipótesis: γ es una curva diferenciable a trozos contenida en un abierto Ω, $\ f$ es una función continua para todo $z \in \gamma$, $\ $ existe una función F derivable en Ω tal que $F'(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega$ (esta función F se llama primitiva de f)

Tesis: $\int_\gamma f(z)\, dz = F(z_2) - F(z_1)$, donde z_1 es el extremo inicial de la curva, y z_2 es el extremo final.

Demostración: Ver libro de Teórico, Capítulo 3, página 31 en
http://www.fing.edu.uy/imerl/varcompleja/2006/notas/Cauchy3.pdf

Ej. 2 parte c) Como e^z es una primitiva de e^z en todo el plano complejo, aplicando la regla de Barrow, obtenemos:

$$\int_\gamma e^z\,dz = e^{z_2} - e^{z_1},$$

donde $z_2 = z(\pi) = -e^{i\pi} + i\operatorname{sen}\pi = +1$ es el extremo final de la curva γ, y $z_1 = z(0) = -e^{i0} + i\operatorname{sen}0 = -1$ es el extremo inicial. Resulta:

$$\int_\gamma e^z\,dz = e - e^{-1}.$$

Ej. 2 parte d) Usando la sugerencia, para todo $z \in \mathcal{A}$ se cumple:

$$|z^2+1| \geq |z^2| - 1 = |z|^2 - 1 = 2^2 - 1 = 3.$$

Usando el teorema de acotación de integrales, tenemos:

$$\Big|\int_{\mathcal{A}} \frac{dz}{z^2+1}\Big| \leq \int_{\mathcal{A}} \Big|\frac{1}{z^2+1}\Big|\,|\,dz| \leq \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{3}\,|\,dz| = \frac{1}{3}\,\text{longitud}(\mathcal{A}) = \frac{1}{3}\,\text{radio}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

Ej. 3 parte a) Los polos de f son i, $-i$ y 2, con multiplicidades respectivas 1, 1 y 2, porque el denominador se factoriza como $(z-i)(z+i)(z-2)^2$.

Ej. 3 parte b) Usando las fórmulas de los residuos con derivadas, como i y $-i$ tienen orden 1, no hay que derivar, y como 2 tiene orden 2, hay que derivar una vez. Queda:

$$\operatorname{Res}_f(i) = \frac{50}{(z+i)(z-2)^2}\Big|_{z=i} = \frac{50}{2i(i-2)^2} = \frac{25}{i(3-4i)} =$$

$$= \frac{25}{4+3i} = \frac{25(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{25(4-3i)}{25} = 4-3i.$$

$$\operatorname{Res}_f(-i) = \frac{50}{(z-i)(z-2)^2}\Big|_{z=-i} = \frac{50}{-2i(-i-2)^2} = \frac{25}{-i(3+4i)} =$$

$$= \frac{25}{4-3i} = \frac{25(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{25(4+3i)}{25} = 4+3i.$$

$$\operatorname{Res}_f(2) = \Big(\frac{50}{z^2+1}\Big)'\Big|_{z=2} = -\frac{100z}{(z^2+1)^2}\Big|_{z=2} = -\frac{200}{25} = -8.$$

Ej. 3 parte c) Usando el teorema de los residuos:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\Big(\operatorname{Res}_f(i)\cdot\operatorname{Ind}_\gamma(i) + \operatorname{Res}_f(-i)\cdot\operatorname{Ind}_\gamma(-i) + \operatorname{Res}_f(2)\cdot\operatorname{Ind}_\gamma(2)\Big) =$$

$$= 2\pi i\Big((-1)(4+3i) + (+1)(-8)\Big) = 2\pi i(-12-3i) = \pi(6-24i).$$