Tercer Examen de Función de Variable Compleja.

Curso 2012

Montevideo, sábado 16 de febrero de 2013.

Nro. de examen:............... Apellido:.. C.I.: ....

Cada ejercicio vale 25 puntos. Puntaje mínimo de aprobación 60 puntos.

Ejercicio 1 Dados cuatro números complejos z_1, z_2, z_3, z_4, tales que z_2, z_3 y z_4 son distintos dos a dos, se llama *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) al complejo imagen de z_1 a través de la transformación de Möebius que transforma z_2 en 0, z_3 en 1 y z_4 en $+\infty$. Es decir, si $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la transformación de Möebius tal que $Tz_1 = 0, Tz_2 = 1, Tz_3 = +\infty$, entonces

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = Tz_1.$$

a) Hallar $(1, i, -1, -i)$.

b) Demostrar que si S es otra transformación de Möebius cualquiera, entonces $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4)$.

Ejercicio 2 *a*) Definir *conjunto conexo* y demostrar que una función holomorfa es nula en una región sii ella y todas sus derivadas se anulan en algún punto del conjunto.

b) Demostrar que los ceros de una función holomorfa no nula son aislados.

c) Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, y

$$f(1/n) = \int_0^{2\pi} \frac{n\cos(e^{it})}{ne^{it} - 1} ie^{it} dt.$$

¿Cuál es el valor de $f(\pi i)$?

Ejercicio 3 Calcular, usando el método de los residuos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)(x^2 + 1)^2}.$$

Ejercicio 4 Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función primaria y $F(s) = \mathcal{L}(f)$ su transformada de Laplace.

a) Mostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-ks}F(s)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < k, \\ f(x - k) & \text{si } x \geq k, \end{cases}$$

donde $\mathcal{L}^{-1}$ denota la transformada de Laplace inversa.

b) Resolver, usando transformadas de Laplace, la siguiente ecuación diferencial.

$$\begin{cases} y' - y = H_2(x), \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \text{donde } H_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 2, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$