Tercer Examen de Función de Variable Compleja.

Curso 2012

Solución

Montevideo, sábado 16 de febrero de 2013.

Cada ejercicio vale 25 puntos. Puntaje mínimo de aprobación 60 puntos.

Ejercicio 1 Dados cuatro números complejos z_1, z_2, z_3, z_4, tales que z_2, z_3 y z_4 son distintos dos a dos, se llama *razón doble* (z_1, z_2, z_3, z_4) al complejo imagen de z_1 a través de la transformación de Möebius que transforma z_2 en 0, z_3 en 1 y z_4 en $+\infty$. Es decir, si $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la transformación de Möebius tal que $Tz_1 = 0, Tz_2 = 1, Tz_3 = +\infty$, entonces

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = Tz_1.$$

a) Hallar $(1, i, -1, -i)$.

b) Demostrar que si S es otra transformación de Möebius cualquiera, entonces $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4)$.

Solución: a) Sea $T : i \mapsto 0, -1 \mapsto 1, -i \mapsto \infty$, entonces

$$Tz = \frac{z-i}{z+i}\frac{-1+i}{-1-i} \Rightarrow T1 = \frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{-1+i}{-1-i} = \frac{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}}{\sqrt{2}e^{\pi i/4}} \cdot \frac{\sqrt{2}e^{3\pi i/4}}{\sqrt{2}e^{-\pi 3i/4}} = e^{\pi i} = -1.$$

b) Sea $T : z_2 \mapsto 0, z_3 \mapsto 1, z_4 \mapsto \infty$, y $H : Sz_2 \mapsto 0, Sz_3 \mapsto 1, Sz_4 \mapsto \infty$. Entonces, por la unicidad de las transformaciones de Möebius, $H^{-1} = S \circ T^{-1}$, de donde $H = T \circ S^{-1}$ y $(Sz_1, Sz_2, Sz_3, Sz_4) = H(Sz_1) = (T \circ S^{-1})(Sz_1) = Tz_1 = (z_1, z_2, z_3, z_4)$.

Ejercicio 2 *a*) Definir *conjunto conexo* y demostrar que una función holomorfa es nula en una región sii ella y todas sus derivadas se anulan en algún punto del conjunto.

b) Demostrar que los ceros de una función holomorfa no nula son aislados.

c) Si $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, y

$$f(1/n) = \int_0^{2\pi} \frac{n\cos(e^{it})}{ne^{it}-1} ie^{it} dt.$$

¿Cuál es el valor de $f(\pi i)$?

Solución: a) y b) Ver teórico. c) Como

$$f(1/n) = \int_0^{2\pi} \frac{n\cos(e^{it})}{ne^{it}-1} ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(e^{it})}{e^{it} - \frac{1}{n}} ie^{it} dt = \int_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z - \frac{1}{n}} dz = 2\pi i \cos(1/n),$$

entonces $f(z) - 2\pi i \cos(z)$ es holomorfa con ceros acumulando en 0, por lo tanto es nula, por lo tanto es nula y $f(z) = 2\pi i \cos(z)$.

Ejercicio 3 Calcular, usando el método de los residuos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+1)^2}.$$

Solución

a) Para calcular la integral, usaremos la siguiente función meromorfa

$$f(z) = \frac{1}{(z^4+1)(z^2+1)^2}$$

la cual tiene seis polos, 3 en el semiplano superior y 3 en el inferior.

La integraremos en la curva γ_r que consiste del segmento $(-r,r)$ y el arco de circunferencia que une sus extremos, en el semiplano positivo, con sentido antihorario. Esta curva encierra 3 de los polos de f si r es suficientemente grande. Como $z/[(x^4+1)(x^2+1)^2] \to 0$ si $z \to \infty$, por el Lema de deformación de curvas, la integral en el semicírculo tiende a 0 al hacer crecer r, por lo tanto se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+1)^2} = \lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z^4+1)(z^2+1)^2}.$$

Además, como cuando r es suficientemente grande γ_r encierra a todos los polos del semiplano superior, por el teorema de los residuos se tiene que

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{(z^4+1)(z^2+1)^2} = 2\pi i \sum_{\text{polos dentro de } \gamma_r} \mathrm{Res}(f).$$

Basta calcular los residuos en los 3 polos, $z_1 = i$, $z_2 = e^{(\pi/4)i}$ y $z_3 = e^{(3\pi/4)i}$. Hay que notar que z_1 es polo doble, mientras los otros son simples.

Calculamos:

$$\mathrm{Res}_{z_1}(f) = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{(z-i)^2}{(z^4+1)(z^2+1)^2} = \lim_{z\to i} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z^4+1)(z+i)^2} = -\frac{3}{8}i$$

$$\mathrm{Res}_{z_2}(f) = \lim_{z\to z_2} \frac{(z-z_2)}{(z^4+1)(z^2+1)^2} = \lim_{z\to z_2} \frac{1}{\dfrac{z^4+1}{z-z_2}(z_2^2+1)^2} = \frac{1}{4z_2^3(z_2^2+1)^2} = \frac{1}{8}e^{\pi i/4} = \frac{1}{8\sqrt{2}}(1+i).$$

y análogamente

$$\mathrm{Res}_{z_3}(f) = \lim_{z\to z_3} \frac{(z-z_3)}{(z^4+1)(z^2+1)^2} = \frac{1}{4z_3^3(z_3^2+1)^2} = \frac{1}{8\sqrt{2}}(-1+i).$$

sumando llegamos a la igualdad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^4+1)(x^2+1)^2} = 2\pi i \sum_{i=1}^{3} \mathrm{Res}_{z_i}(f) = -\frac{1}{4}(\sqrt{2}-3)\pi$$

Ejercicio 4 Sea $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ una función primaria y $F(s) = \mathcal{L}(f)$ su transformada de Laplace.

a) Mostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-ks}F(s)) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < k, \\ f(x-k) & \text{si } x \geq k, \end{cases}$$

donde $\mathcal{L}^{-1}$ denota la transformada de Laplace inversa.

b) Resolver, usando transformadas de Laplace, la siguiente ecuación diferencial.

$$\begin{cases} y' - y = H_2(x), \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad \text{donde } H_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 2, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Solución:

a) 1) Basta hacer el cambio de variable $t = x - c$ en el siguiente cálculo

$$F(s) = \mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_c^\infty f(x-c)e^{-s(x-c)}dx = e^{sc}\int_c^\infty f(x-c)e^{-sx}dx$$

y que

$$\int_c^\infty f(x-c)e^{-sx}dx = \mathcal{L}(f^*)(s) \text{ siendo } f^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ f(x-k) & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

y por lo tanto $\mathcal{L}(f*)(s) = e^{-sc}F(s)$, de la unicidad de la transformada de Laplace se deduce lo que se quiere probar.

2) Tomando la transformada a ambos lados de la ecuación tenemos

$$\mathcal{L}(y' - y) = \mathcal{L}(H_2).$$

Usando que $y(0) = 0$, entonces

$$\mathcal{L}(y' - y) = \mathcal{L}(y') - \mathcal{L}(y) = s(\mathcal{L}(y) - y(0)) - \mathcal{L}(y) = (s-1)\mathcal{L}(y).$$

Además

$$\mathcal{L}(H_2) = \frac{e^{-2s}}{s}.$$

Entonces, la transformada de la ecuación se reduce a

$$(s-1)\mathcal{L}(y) = \frac{e^{-2s}}{s}.$$

Y la transformada de la solución es:

$$\mathcal{L}(y) = \frac{e^{-2s}}{s(s-1)} = e^{-2s}\frac{1}{s(s-1)} = e^{-2s}\left(\frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}\right).$$

Por lo tanto

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\left(\frac{-1}{s} + \frac{1}{s-1}\right)\right) = -\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s-1}\right).$$

Usando la parte anterior, se tiene que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s-1}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ e^{(x-2)} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

y además

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\frac{1}{s}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \text{ por lo tanto } y = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2, \\ e^{(x-2)} - 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$