Primer Examen de Función de Variable Compleja.

Curso 2012

Montevideo, viernes 20 de julio de 2012.

Parcial Nro:............... Apellido:.. C.I.: ....

Cada ejercicio vale 25 puntos.

Ejercicio 1 a) Demostrar que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es diferenciable y $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es diferenciable y $(f \circ g)'(z) = f'(g(z)).g'(z)$.

b) Demostrar que si $f(z)$ es holomorfa en $z = a$ y $f'(a) \neq 0$, entonces f es conforme en a.

c) Mostrar que $g(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ (definida en la rama principal de la raíz) es un mapa conforme de $\mathbb{H} - (0, i]$ en $\mathbb{H} = \{z : \text{Im}(z) > 0\}$.

Ejercicio 2 *a*) Enunciar y demostrar el principio del argumento.

b) Mostrar que si $C > e$ la ecuación $Cz^n = e^z$ tiene n soluciones en $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$

c) Calcular la siguiente integral

$$\int_{|z|=1} \frac{20z^4 - e^z}{e^z - 4z^5} dz$$

recorrida en sentido antihorario.

Ejercicio 3 Hallar

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{4x^2 - \pi^2} dx$$

Ejercicio 4 a) Demostrar que si f holomorfa, posee un polo de orden 2 en a y $h(z)$ es la extensión analítica de $(z - a)^2 f(z)$ en a, el residuo de f en a es

$$Res_a f = h'(a).$$

b) Resolver usando Laplace

$$f'(t) - 2\int_0^t f(x)\sin(t - x)dx + 2f(t) = 1.$$

con condiciones iniciales $f(0) = 0$ and $f'(0) = 0$.

SOLUCIONES

Ejercicio 1 *a*) Ver teórico.

b) Ver teórico.

c) Tomamos $z \in \mathbb{H} - (0, i]$, entonces Arg $z \in (0, \pi)$ y al aplicar z^2 se duplica su argumento, quedando como imagen $\mathbb{C} - [-1, +\infty)$, al sumarle uno, la imagen se traslada a $\mathbb{C} - [0, +\infty)$, al aplicar la raiz, la región $\mathbb{C} - [0, +\infty)$ se transforma en $\mathbb{H}$ como queríamos probar.
Es fácil ver que $g'(z) \neq 0$ si $z \in \mathbb{H} - (0, i]$ y por tanto es conforme.

Ejercicio 2 *a*) Ver teórico.

b) Tenemos que $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\ z}$, y como $|z| < 1$, $|e^z| < e$. Cuando $|z| = 1$ tenemos que $|e^z| \leq e$ y $|Cz^n| = C|z|^n = C$.
Ahora, si comparamos en $|z| = 1$, tenemos dada la siguiente desigualdad, pues $C > e$,:

$$|Cz^n - e^z - Cz^n| = |e^z| \leq |Cz^n|$$

Por el teorema de Rouché, $Cz^n - e^z = 0$ tiene igual número de soluciones que $Cz^n = 0$ en $\mathbb{D}$, teniéndo la última n soluciones.

c) Observar que $20z^4 - e^z = -f'(z)$ donde $f(z) = e^z - 4z^5$, entonces la integral

$$\int_{|z|=1} \frac{20z^4 - e^z}{e^z - 4z^5} dz = -\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

Por el principio del argumento, $\int_{|z|=1} f'(z)/f(z)dz = 2\pi i(c(f) - p(f))$, donde $c(f)$ representa el número de ceros de f y $p(f)$ el número de polos.
En nuestro caso la función f no tiene polos, por lo tanto $p(f) = 0$ y $c(f) = 5$ por la parte anterior. Entonces la integral queda así:

$$\int_{|z|=1} \frac{20z^4 - e^z}{e^z - 4z^5} dz = -10\pi i$$

Ejercicio 3 Hallar

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{4x^2 - \pi^2} dx$$

Solución

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{4x^2 - \pi^2} dx = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iz}}{4z^2 - \pi^2} dz \right) = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(\pi i (Res_{\pi/2} + Res_{-\pi/2}) \right)$$

el integrando tiene dos polos simples en $\pm\pi/2$ con residuos

$$Res_{\pi/2} = \frac{e^{i\pi/2}}{4(\pi/2 + \pi/2)} = \frac{e^{i\pi/2}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} i$$

$$Res_{-\pi/2} = \frac{e^{-i\pi/2}}{4(-\pi/2 - \pi/2)} = \frac{e^{-i\pi/2}}{-4\pi/2} = \frac{1}{4\pi} i$$

De donde

$$\frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(\pi i (Res_{\pi/2} + Res_{-\pi/2}) \right) = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(\pi i \frac{1}{2\pi} i \right) = -\frac{1}{4}.$$

Recordemos que para calcular estas integrales se calcula en un rectángulo con un lado sobre el eje real. Los residuos sobre el eje real se cuentan como si fueran medio residuo.

Ejercicio 4 a) Demostrar que si f holomorfa, posee un polo de orden 2 en a y $h(z)$ es la extensión analítica de $(z-a)^2 f(z)$ en a, el residuo de f en a es

$$Res_a f = h'(a).$$

b) Resolver usando Laplace

$$f'(t) - 2\int_0^t f(x)\sin(t-x)dx + 2f(t) = 1.$$

con condiciones iniciales $f(0) = 0$ and $f'(0) = 0$.

Solución:

a) Como f posee un polo de orden 2, será de la forma $f(z) = A/(z-a) + B/(z-a)^2 + g(z)$, de de donde $h(z) = A(z-a) + B + (z-a)^2 g(z)$ y $h'(z) = A + 2(z-a)g(z) + (z-a)g'(z)$. Por lo tanto $h'(a) = A = Res_a f$.

b) Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la igualdad y observando que el segundo término del primer miembro es una convolución:

$$pf^*(p) - f(0) - 2f^*(p)\frac{1}{p^2+1} + 2f^*(p) = \frac{1}{p}.$$

o sea

$$f^*(p)(p^3 + p - 2 + 2p^2 + 2) = \frac{p^2+1}{p}.$$

De donde

$$f^*(p) = \frac{p^2+1}{p^2(p^2+2p+1)} = \frac{p^2+1}{p^2(p+1)^2} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{(p+1)^2}$$

$$B = \frac{0^2+1}{(0+1)^2} = 1 \qquad D = \frac{(-1)^2+1}{(-1)^2} = 2.$$

$$A = Res_0 = \left(\frac{p^2+1}{(p+1)^2}\right)'(0) = \left(\frac{2p((p+1)^2) - (p^2+1)(p+1)^2}{(p+1)^4}\right)(0) = \left(\frac{20((0+1)^2) - (0^2+1)2(0+1)}{(0+1)^4}\right) = -2$$

$$C = Res_{-1} = \left(\frac{p^2+1}{p^2}\right)'(-1) = \left(1 + p^{-2}\right)'(-1) = \left(-2p^{-3}\right)'(-1) = 2.$$

De donde

$$f(t) = -2e^t + 2\frac{t}{\Gamma(2)} + 2e^{-t} + 2e^{-t}\frac{t}{\Gamma(2)} = -2e^t + 2t + 2e^{-t} + 2e^{-t}t.$$