Examen de Funciones de Variable Compleja.

15 de febrero de 2012.

Nota: El examen consta de 3 ejercicios de 3 partes c/u. El mínimo para aprobar es de 5 partes bien resueltas.

1. Sean $a \neq b$ dos complejos fijos no nulos, ambos con el mismo argumento igual a $\pi/4$, y tales que $|a| < |b|$.

   a) Encontrar la transformación de Moebius $w = w(z)$ tal que

   $$w(-i) = a, \quad w(0) = (a+b)/2, \quad w(i) = b$$

   b) Encontrar una transformación de Moebius h que lleve el el disco unitario $D = \{|z| < 1\}$ al semiplano $Re\, z < 0$. (Si hubiera más de una transformación posible elegir una sola).

   c) Hallar la imagen del disco D por la transformación f siguiente:

   $$f(z) = Log_{[0,2\pi)}\, w(h(z))$$

   donde w y h son las transformaciones de Moebius de las partes a) y b).

2. Sea $P(z) = z^9 + 3z^7 + 2^7$.

   a) Probar que si $z = 2e^{2k\pi i/7}$ para algún número entero k, entonces $|P(z)| > 0$.

   b) Probar que si $|z| = 2$, pero $z \neq 2e^{2k\pi i/7}$ para todo número entero k, entonces

   $$|3z^7 + 2^7| < 2^9$$

   c) Probar que todas las raíces complejas de $P(z)$ cumplen $|z| < 2$.

3. *a*) Hallar la transformada de Laplace $F(p)$ y su semiplano de convergencia de la función:

   $$f(t) = e^{(2+i)t} \quad \forall t \geq 0$$

   b) Hallar la transformada de Laplace $X(p)$ de la función $x(t)$ que cumple

   $$\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = e^{(2+i)t} \quad \forall t \geq 0$$

   $$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1$$

   c) Hallar la función $x(t)$ de la parte b).
   (Sugerencia: Podrá usarse sin probar la siguiente identidad de separación en fracciones simples:

   $$\frac{p+a}{(p-2-i)(p^2-3p+2)} = \frac{-(1+i)(2+i+a)/2}{p-2-i} + \frac{(1-i)(1+a)/2}{p-1} + \frac{(2+a)i}{p-2}$$

   válida para todo p complejo que no anule los denominadores, y para a complejo fijo cualquiera.)