Segundo Examen de Función de Variable Compleja.

Curso 2012

Montevideo, sábado 8 de diciembre de 2012.

Nro. de examen:............... Apellido:.. C.I.: ....

Cada ejercicio vale 25 puntos. Puntaje mínimo de aprobación 60 puntos.

Ejercicio 1 Demostrar el segundo teorema de Cauchy visto en el teórico que dice que si f es holomorfa en Ω y R es un rectángulo incluido en Ω, entonces

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Ejercicio 2 *a*) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua tal que para cualquier rectángulo R con lados paralelos a los ejes, se verifica

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

Demostrar que f es holomorfa.

b) Sean $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, holomorfa en aquellos z tales que $\mathrm{Im}(z) \neq 0$ y continua en el eje real, es decir, en los z tales que $\mathrm{Im}(z) = 0$. Demostrar que f es holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

c) Sea $\Omega = \{z : \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa en los z tales que $\mathrm{Im}(z) > 0$ y continua y real en el eje real. Mostrar que existe $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa que extiende a f, o sea que $F(z) = f(z)$ si $z \in \Omega$.

Ejercicio 3 Calcular

$$\int_0^{2\pi} (\sin x)^{10}\, dx.$$

Ejercicio 4 *a*) Dados a y c reales, considere la función $h(t) = e^{c(t-a)} H_a(t)$ donde $H_a(t) = 1$ si $t \geq a$ y 0 si $t < a$. Hallar la transformada de Laplace de $h(t)$ y su abscisa de convergencia.

b) Hallar f y g que verifiquen $f(0) = g(0) = 0$ y

$$\begin{cases} f'(t) + g(t) = H_1(t), \\ f(t) + g'(t) = H_1(t). \end{cases}$$

SOLUCIONES

Ejercicio 1 Ver teórico.

Ejercicio 2 a) Notar que la condición permite definir bien una función $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que cumple $F' = f$ (es el mismo razonamiento que en el caso de que la integral se anule en cualquier curva cerrada). Que f sea holomorfa sigue de un razonamiento análogo al del teorema de Morera: al ser una derivada, y por el hecho de que las funciones holomorfas son infinitamente derivables, f es derivable también.

b) Claramente la función f es continua. Además, es holomorfa en todos los puntos fuera del eje real. Por la parte anterior basta demostrar que la integral en cualquier rectángulo que corte al eje real es nula. Hay dos casos o bien el rectángulo tienen un lado en el eje real o no (simplemente dos de sus lados cortan al eje real). En el primer caso movemos el rectángulo R un ϵ en forma vertical de forma de obtener un rectángulo R_ϵ que quede contenido en uno de los semiplanos (superior o inferior según el caso). La integral en ∂R_ϵ tenderá a la integral en ∂R cuando $\epsilon \to 0$ por ser f continua, pero la integral en ∂R_ϵ es nula, por lo tanto la integral en ∂R también. El segundo caso es cuando el rectángulo R corta al eje real. En dicho caso dividimos el rectángulo R en dos rectángulos R_1 y R_2 con un lado en común sobre el eje real. La integral en ∂R será la suma de la integral en ∂R_1 más la integral en ∂R_2. Pero estas dos últimas son nulas por caer en el caso anterior.

c) Basta definir $F(z)$ igual a $f(z)$ si $\mathrm{Im}(z) \geq 0$ e igual a $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$ si $\mathrm{Im}(z) \leq 0$. Obviamente $g(z)$ es continua en la recta real (que llamaremos $\mathbb{R}$) pues es composición de funciones continuas. Además g coincide con f en $\mathbb{R}$ ya que si $z \in \mathbb{R}$ entonces $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(z)} = f(z)$ donde la última igualdad es debida a que por hipótesis $f(z)$ es real en el eje real. Para aplicar la parte anterior basta entonces demostrar que $g(z)$ es holomorfa en $\mathrm{Im}(z) < 0$. Efectivamente

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(z+h)-g(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\overline{z+h})} - \overline{f(\bar{z})}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}}{h} = \lim_{h\to 0} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}+\bar{h}) - f(\bar{z})}{\bar{h}} \right)}$$

Como $\bar{h} \to 0$ cuando $h \to 0$ y como f es holomorfa en $\bar{z}$ y la conjugación es continua, el último límite de las igualdades anteriores existe (y es igual a $\overline{f'(\bar{z})}$), por lo que g es holomorfa en z.

Ejercicio 3

$$\int_0^{2\pi} \sin^{10} x dx = -i \int_{C_1} \left[\frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z} \right) \right]^{10} \frac{dz}{z} = -i \int_{C_1} \frac{1}{(2i)^{10}} \left(z^2-1\right)^{10} \frac{dz}{z^{11}} = -i \int_{C_1} \frac{1}{-2^{10}} \left(z^2-1\right)^{10} \frac{dz}{z^{11}}.$$

Debo hallar el coeficiente en z^{10} de $(z^2-1)^{10}$. Usando la fórmula del binomio o derivando cinco veces la expresión $(u-1)^{10}$, obtenemos que dicho coeficiente es $\binom{10}{5}(-1)^5 = -10!/(5!5!)$. De donde

$$\int_0^{2\pi} \sin^{10} x dx = i2\pi i \frac{1}{2^{10}} \frac{(-10!)}{5!5!} = \frac{1}{2^9} \frac{10!}{5!5!} \pi = \frac{63}{2^7} \pi \approx 1,55.$$

Ejercicio 4 a) Como

$$L(e^{ct}H_a) = \int_0^{+\infty} e^{ct} H_a(t) e^{-pt} dt = \int_a^{+\infty} e^{(c-p)t} dt = \left. \frac{e^{(c-p)t}}{c-p} \right|_a^{+\infty} \underset{\text{si } p>c}{=} -\frac{e^{(c-p)a}}{c-p} = \frac{e^{(c-p)a}}{p-c} = e^{ca} \frac{e^{-ap}}{p-c},$$

entonces

$$L(e^{c(t-a)}H_a) = \frac{e^{-ap}}{p-c}$$

y su abscisa de convergencia es $p_0 = c$.

b) Aplicamos la transformada de Laplace a ambos miembros de las ecuaciones obtenemos

$$\begin{cases} pf^*(p) + g^*(p) = \frac{e^{-p}}{p}, \\ f^*(p) + pg^*(p) = \frac{e^{-p}}{p}. \end{cases}$$

Por simetría es obvio que $f^* = g^*$, de donde

$$pf^*(p) + f^*(p) = \frac{e^{-p}}{p} \iff f^*(p) = \frac{e^{-p}}{p(p+1)} = e^{-p}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right).$$

De donde $f(t) = H_1(t) - e^{-(t-1)}H_1(t)$ y $g(t) = f(t)$.