Examen de Funciones de Variable Compleja.

Julio de 2011.

Apellido y nombre ______________________ Cédula de Identidad ______________

Núm. examen

Nota: Cada parte vale 10 puntos, con un máximo de 100. El mínimo para aprobar es 50 puntos. La duración del examen es de 3 horas y media.

1. *a*) Hallar todos los complejos z, expresados en coordenadas polares, que satisfacen la ecuación $z^3 = 1+\sqrt{3}\,i$. Demostrar que son solo tres las soluciones y dibujar los tres puntos correspondientes en el plano complejo. Sugerencia: Puede ser útil recordar que $\cos(\pi/3) = 1/2$, $\operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2$.

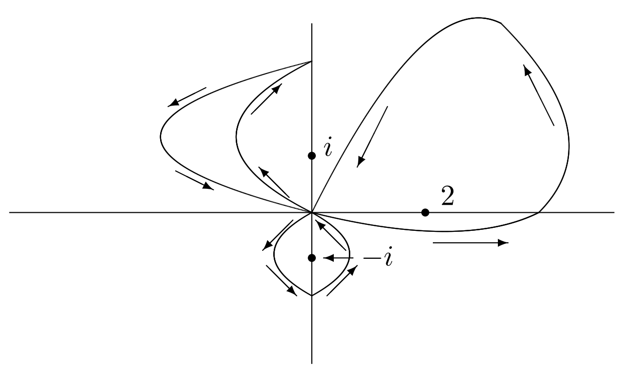
   b) Elíjase una solución z_0 cualquiera de la parte a). Demostrar que todos los complejos w que satisfacen la ecuación $\dfrac{w+1}{w-1} = \lambda z_0$ para algún λ real, están en una circunferencia que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$, excluyendo el punto $(1,0)$.

   c) Demostrar que el lugar geométrico de los puntos $w \in \mathbb{C}$ que satisfacen la ecuación $\left(\dfrac{w+1}{w-1}\right)^3 = (\lambda)^3(1+\sqrt{3}\cdot i)$ para algún λ real, es la unión de tres arcos de circunferencias que pasan por los puntos $(-1,0)$ con $(1,0)$, excluyendo el punto $(1,0)$.

2. *a*) Enunciar hipótesis y tesis del teorema del índice para calcular mediante integración $Ind_\gamma(z_0)$.

   b) Demostrarlo en el caso particular que la curva sea de Jordan (cerrada sin autointersecciones), recorrida una sola vez en sentido antihorario, y que el punto z_0 pertenezca a la región encerrada por la curva.

   c) Considérese la función $f(z) = \dfrac{50}{(z^2+1)(z-2)^2}$ y la curva γ de la figura, diferenciable a trozos. Calcular $I = \int_\gamma f(z)\,dz$. (Enunciar las fórmulas o teoremas que se utilicen, sin necesidad de demostrarlos)



3. *a*) Si $X(p)$ es la transformada de Laplace de $x(t)$ con semiplano de convergencia $Re(p) > a$, enunciar y demostrar la fórmula para la transformada de $\dot{x}(t)$ y su semiplano de convergencia.

   b) Encontrar (justificando la respuesta) la transformada $F(p)$ y su semiplano de convergencia, de la función $f(t) = e^{2+i}t$ para todo $t \geq 0$.

   c) Encontrar la transformada de Laplace $X(p)$ de la función $x(t)$ que verifica la siguiente ecuación diferencial con datos iniciales:

$$\dot{x}(t) + (2-i)x(t) = e^{(2+i)t} \quad \forall\ t \geq 0, \quad x(0) = 0.$$

d) Resolver, usando el método de transformada de Laplace, la ecuación diferencial con datos iniciales, de la parte anterior.