Soluciones del Examen de Funciones de Variable Compleja 14/07/2011

Ej.1 a) $z^3 = 1+\sqrt{3}\,i$. Si z verifica esa ecuación, entonces $z \neq 0$ (porque $0^3 = 0 \neq 1+\sqrt{3}\,i$). Luego z tiene coordenadas polares, $\rho = |z| > 0$, $\phi = Arg_{[0,2\pi)]}(z) \in arg(z)\bigcap[0,2\pi)$. Escribiendo $z = \rho e^{i\phi}$, y observando que $1+\sqrt{3}\,i$ tiene módulo $+\sqrt{1+3} = 2$ y argumento el ángulo ψ tal que $2e^{i\psi} = 1+\sqrt{3}\,i$, deducimos que $\cos\psi = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{sen}\psi = 1/2$. Luego, el argumento ψ de $1+\sqrt{3}\,i$ es $\pi/3$ más cualquier múltiplo entero de 2π. La ecuación del principio entonces queda $(\rho e^{i\phi})^3 = 2e^{i(\pi/3)+2k\pi i}$, para k entero cualquiera; de donde $\rho^3 e^{3i\phi} = 2e^{i(\pi/3)+2k\pi i}$. Entonces $\rho = \sqrt[3]{2}$ (la raíz cúbica de 2 es en el campo real), y $3\phi = (\pi/3)+2k\pi$, o sea $\phi = (\pi/9)+k\,2\pi/3$, donde k es constante entera cualquiera. Cuando $k=0$ se obtiene el argumento $\phi_0 = \pi/9$ y entonces $z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/9}$ es la primera solución encontrada. Cuando $k=1$ se obtiene el argumento $\phi_1 = 7\pi/9$ y entonces $z_1 == \sqrt[3]{2}e^{i7\pi/9}$ es la segunda solución encontrada. Cuando $k=2$ se obtiene el argumento $\phi_1 = 13\pi/9$ y entonces $z_2 == \sqrt[3]{2}e^{i(13)\pi/9}$ es la tercera solución encontrada. Estas son las únicas tres soluciones, pues para los demás valores enteros de k se obtiene argumento $\pi/9 + k(2\pi)/3$: si $k = 3h$ es múltiplo de 3 (h entero cualquiera), el argumento es $\pi/9 + 2h\pi$, obteniéndose el mismo complejo z_0 que se obtuvo cuando $k=0$. Si $k = 3h+1$ es 1 más un múltiplo de 3 (h entero cualquiera), el argumento queda $7\pi/9 + 2h\pi$, obteniéndose el mismo complejo z_1 que se obtuvo cuando $k=1$. Finalmente si $k = 3h+2$ es 2 más un múltiplo de 3 (h entero cualquiera), el argumento queda $(13)\pi/9 + 2h\pi$, obteniéndose el mismo complejo z_2 que se obtuvo cuando $k=2$. El dibujo de los tres complejos z_0, z_1, z_2 en el plano complejo, es el de los vértices de un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt[3]{2}$, de manera que z_0 tiene argumento $\pi/9$ radianes = 20 grados.

Ej.1 b) Sea $z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/9}$ encontrado como una de las tres soluciones de la parte a). La ecuación dada $\dfrac{w+1}{w-1} = \lambda z_0$ para algún λ real se cumple si y solo si $w \in C_0$ donde C_0 es el lugar geométrico buscado. Cuando $w=-1$, se verifica la ecuación dada con $\lambda = 0$. Por lo tanto, hemos probado que el punto $(-1,0)$ del plano pertenece a C_0.

Si $w_\lambda \in C_0$ es un complejo que verifica la ecuación dada para cierto λ real, entonces llamemos a si existe, al complejo $a = \lim_{\lambda\to+\infty} w_\lambda$. En la ecuación $\dfrac{w_\lambda+1}{w_\lambda-1} = \lambda z_0$, haciendo λ tender a $+\infty$ resulta $\dfrac{a+1}{a-1} = +\infty$, donde la igualdad debe entenderse en la esfera de Riemann. Entonces $a = 1$. Hemos probado que el lugar geométrico C_0 en el plano complejo, que contiene a todos los w_λ, acumula en el punto $(1,0)$, pues $1 = \lim_{\lambda\to+\infty} w_\lambda$.

Sea la transformación de Moebius $z = f(w) = (w+1)/(w-1)$. La ecuación dada se cumple para algún w si y solo si $f(w) = \lambda z_0$, y esto se cumple si y solo si el punto $f(w)$ está en la recta r_0 que pasa por el origen y por z_0. Entonces la transformación de Moebius $z = f(w) = (w+1)(w-1)$ lleva el lugar geométrico buscado C_0 (de todos los w que satisfacen la ecuación dada), en el lugar geométrico de los $z = \lambda z_0 \in r_0$ (es decir f lleva C_0 en la recta r_0). Por lo tanto la transformación de Moebius inversa $w = f^{-1}(z)$ lleva la recta r_0 en el lugar geométrico C_0 buscado.

Ahora uno podría encontrar explícitamente la transformación de Moebius inversa $w = f^{-1}(z)$ de $z = f(w) = (w+1)/(w-1)$ y hallar la imagen por f^{-1} de la recta $z \in r_0$, tomando tres puntos cualesquiera de la recta r_0, buscando sus imágenes por f^{-1}, y luego, si estuvieran alineados, la imagen sería la recta C_0 que los contiene; y si no estuvieran alineados, la imagen sería la circunferencia C_0 que los contiene.

En vez de eso vamos a hacer un argumento abstracto que nos va a servir para ahorrar cuentas en la parte siguiente. Ya sabemos que la imagen C_0 por la transformación de Moebius f^{-1} de la recta r_0, pasa por el punto $(-1,0)$ y acumula en el punto $(1,0)$. También sabemos que es o bien una recta o bien una circunferencia. Solo falta demostrar que es una circunferencia, para lo cual hay que demostrar que no es una recta. Supongamos por absurdo que fuera una recta. Si C_0 fuera una recta debería ser la recta que pasa por los dos puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$, y entonces debería pasar por el origen. Entonces el origen $w=0$ debería ser una solución de la ecuación dada; es decir: $\dfrac{0+1}{0-1} = \lambda z_0$ para algún λ real. Entonces $-1 = \lambda z_0$ para algún $\lambda \neq 0$ real (pues $\lambda = 0$ no lo cumple). Luego $-\pi = Arg(\lambda z_0) = \pi/9$ si $\lambda > 0$, o $-\pi = Arg(\lambda z_0) = 10\pi/9$ si $\lambda < 0$. Eso es absurdo pues $\pi \neq \pi/9$, $\pi \neq 10\pi/9$. LQQD.

Ej.1 c) La ecuación dada $\left(\dfrac{w+1}{w-1}\right)^3 = (\lambda)^3(1+\sqrt{3}\cdot i)$ para algún λ real, se cumple si y solo si $\dfrac{w+1}{w-1} = \lambda z_i$ para algún λ real y algún z_i tal que $z_i^3 =$. En la parte a) demostramos que solo hay tres valores posibles para z_i que son z_0, z_1 ó z_2. Luego las soluciones w buscadas son las que verifican la ecuación de la parte b), y además las que verifican la ecuación como la de la parte b) pero con z_1 en vez de z_0, y además las que verifican la ecuación pero con z_2 en vez de z_0. Usando la parte b), sabemos que las que verifican la ecuación con $z_0 = \sqrt[3]{2}e^{i\pi/9}$, están contenidas en una circunferencia que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$, excluyendo el punto $(1,0)$. Esta circunferencia es la imagen por la transformación de Moebius inversa $w = f^{-1}(z)$, de la recta r_0 que pasa por el origen y por z_0. (La transformación de Moebius f en la parte b) es $z = f(w) = (w+1)/(w-1)$.)

Haciendo el mismo razonamiento que en la parte b) pero para $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{7i\pi/9}$, uno deduce que el lugar geométrico C_1 de las soluciones de la ecuación $\dfrac{w+1}{w-1} = \lambda z_1$ para algún λ real, está contenido en una circunferencia que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ (excluyendo el punto $(1,0)$). Esta circunferencia es la imagen por la transformación de Moebius inversa $w = f^{-1}(z)$, de la recta r_1 que pasa por el origen y por z_1. La transformación de Moebius f es la misma que en la parte b) $z = f(w) = (w+1)/(w-1)$.

Análogamente, con $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{(13)i\pi/9}$, uno deduce que el lugar geométrico C_2 de las soluciones de la ecuación $\dfrac{w+1}{w-1} = \lambda z_2$ para algún λ real está contenido en una circunferencia que pasa por los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$. Esta circunferencia es la imagen por la transformación de Moebius inversa $w = f^{-1}(z)$, de la recta r_2 que pasa por el origen y por z_2. La transformación de Moebius f es la misma que en la parte b) $z = f(w) = (w+1)/(w-1)$.

Las tres circunferencias que se obtuvieron (con z_0 en la parte b) y con z_1 y z_1 después) pasan por los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$, excluyendo el punto $(1,0)$, pero son las tres distintas (no disjuntas, sino distintas circunferencias). En efecto, las tres circunferencias son imágenes por la misma transformación de Moebius f^{-1} de tres rectas distintas, y la transformación e Moebius f^{-1} es inyectiva (porque es invertible con inversa f).

Hemos probado entonces que el lugar geométrico de todas las soluciones w de la ecuación dada en la parte c) está contenido en la unión de tres circunferencias que pasan por $(-1,0)$ y $(1,0)$. LQQD

Ej.2 a) y b) Enunciado y demostración del Teorema de índice: ver por ejemplo "*Funciones de Variable Compleja*", E.C.; Capítulo 5, Teorema 5.4.2 y su demostración en páginas 56 y 57.

Ej.2 c). Los polos de $f(z) = 50/[(z^2+1)(z-2)^2]$ son las raíces de su denominador: $i, -i$ simples, y 2 doble. Descomponemos la curva $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ en los tres bucles γ_1, γ_2 y γ_3, siendo cada bucle una curva cerrada simple (sin autointersecciones): El primero γ_1 no encierra ninguno de los polos de $f(z)$, el segundo γ_2 encierra solo al polo $-i$ dando una sola vuelta alrededor de él en sentido antihorario. Y el tercero γ_3 encierra solo al polo 2 dando una sola vuelta alrededor de él en sentido antihorario.

$$I = \int_\gamma \frac{50}{(z^2+1)(z-2)^2}\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \int_{\gamma_3} f(z)\,dz = I_1 + I_2 + I_3.$$

Por el teorema de Cauchy, siendo γ_1 homotópica a un punto en $\omega = \mathbb{C} \setminus \{i, -i, 2\}$ y siendo $f \in H(\Omega)$, se tiene:

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = 0$$

Siendo γ_2 homotópica a un punto en $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{i, 2\}$ y siendo $h(z) = 50/[(z-i)(z-2)^2]$ holomorfa en Ω_2, podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy a $h(z)$:

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \frac{50}{(z^2+1)(z-2)^2}\,dz = \int_{\gamma_2} \frac{h(z)}{z+i}\,dz = 2\pi i h(-i) = 2\pi i \frac{50}{(z-i)(z-2)^2}\bigg|_{z=-i}$$

$$I_2 = 2\pi i\,\frac{50}{(-2i)(-i-2)^2} = \frac{-50\,\pi}{(i+2)^2} = \frac{-50\,\pi(2-i)^2}{[(2+i)(2-i)]^2} = \frac{-50\,\pi\,(4-4i-1)}{25} = (-6+8i)\,\pi$$

Siendo γ_3 homotópica a un punto en $\Omega_3 = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y siendo $g(z) = 50/(z^2+1)$ holomorfa en Ω_3, podemos aplicar la fórmula integral de Cauchy de la derivada primera a $g(z)$:

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \frac{50}{(z^2+1)(z-2)^2}\,dz = \int_{\gamma_3} \frac{g(z)}{(z-2)^2} = 2\pi i g'(2) = 2\pi i \left(\frac{50}{z^2+1}\right)'\bigg|_{z=2}$$

$$I_3 = 2\pi i\,\frac{-100\,z}{(z^2+1)^2}\Big|_{z=2} = \frac{-400\,\pi\,i}{25} = -16\pi\,i$$

Luego

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = (-6 + 8i - 16i)\,\pi = -(6+8i)\pi.$$

Ej.3 a) Sea $x(t)$ es una función Laplace-transformable, es decir $|x(t)| \leq e^{at}$ para cierta constante a real y para todo $t \geq 0$, y $x(t) = 0$ para todo $t < 0$. Si $X(p)$ denota a la transformada de Laplace de $x(t)$ para p complejo en el semiplano de convergencia $Re(p) > a$, entonces la transformada de Laplace $[\mathcal{L}(\dot{x}(t))](p)$ de la derivada $\dot{x}(t)$ es $[\mathcal{L}(\dot{x}(t))](p)pX(p) - x(0)$ para todo p en el mismo semiplano de convergencia $Re(p) > a$.

Demostración: $[\mathcal{L}(\dot{x}(t))](p) = \int_0^{+\infty} \dot{x}(t)e^{-pt)}\,dt = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T \dot{x}(t)e^{-pt)}\,dt$. Integrando por partes, con p constante, se tiene

$$\int_0^T \dot{x}(t)e^{-pt)}\,dt = e^{-pt}x(t)|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T x(t)(e^{-pt})^{\cdot}\,dt = e^{-pT}x(T) - x(0) + p\int_0^T e^{-pt}\,dt.$$

Tomando límite cuando $T \to +\infty$ en la igualdad anterior con p complejo constante, queda:

$$[\mathcal{L}(\dot{x}(t))](p) = p\int_0^{+\infty} x(t)e^{pt}\,dt + \lim_{T\to+\infty} e^{-pT}x(T).$$

Por un lado la integral impropia en la última expresión es, por definición, la transformada de Laplace $X(p)$ de $x(t)$ válida para todo p complejo constante en el semiplano $Re(p) > a$. Entonces queda

$$[\mathcal{L}(\dot{x}(t))](p) = pX(p) - x(0) + \lim_{T\to+\infty} e^{-pT}x(T).$$

Por otro lado

$$|e^{pT}f(T)| = |e^{pT}||x(T)| = e^{(Re(p))T} \cdot |x(T)| \leq e^{(Re(p))T} \cdot e^{aT} = e^{(Re(p)-a)T} \to 0$$

cuando $T \to +\infty$ porque $Re(p) - a$ es una constante real negativa (pues $Re(p) > a$). Entonces deducimos que $[\mathcal{L}(\dot{x}(t))](p) = pX(p) - x(0)$. LQQD

$x(t)\ e^{-pb}\ \int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}\,du = e^{-pb}\,[\mathcal{L}(f(t))](p) = e^{-pb}F(p)$ para todo p complejo tal que $Re(p) > a$.

Ej.3 b) Siendo $f(t) = e^{(2+i)t}$ para todo $t \geq 0$ se cumple que $|f(t)| = |e^{(2+i)t}t| = e^{2t}|e^{it}| = e^{2t}$. Luego $|f(t)| \leq e^{at}$ con $a = 2$, para todo $t \geq 0$. Por lo tanto $f(t)$ es Laplace transformable y su transformada de Laplace $F(p)$ va a estar definida en el semiplano de convergencia $Re(p) > 2$. Podemos encontrar explícitamente $F(p)$ usando la definición de transformada de Laplace. Pero vamos a usar otro camino que aplica el resultado demostrado en la parte a).

$f'(t) = (e^{(2+i)t})' = (2+i)e^{(2+i)t} = (2+i)f(t)$. Luego

$[\mathcal{L}(f'(t))](p) = [\mathcal{L}((2+i)f(t))](p) = (2+i)F(p)$ para todo p tal que $Re(p) > 2$. Por otra parte, usando la parte a) tenemos:

$[\mathcal{L}(f'(t))](p) = pF(p) - f(0)$ para todo p tal que $Re(p) > 2$. Siendo $f(0) = e^{(2+i)\cdot 0} = e^0 = 1$ deducimos:

$pF(p) - 1 = [\mathcal{L}(f'(t))](p) = (2+i)F(p)$ para todo p tal que $Re(p) > 2$, de donde

$(p-2-i)F(p) = 1$ para todo p tal que $Re(p) > 2$, o sea $F(p) = 1/(p-2-i)$ en el semiplano de convergencia $Re(p) > 2$.

Ej.3 c) Llamando $X(p)$ a la transformada de Laplace de $x(t)$ y usando las fórmulas demostradas en las parte a) y b), aplicamos la transformada a ambos lados de la igualdad $\dot{x}(t) + (2-i)x(t) = e^{(2+i)t}\ \ \forall\, t \geq 0,\ \ x(0) = 0$. Queda:

$$p\,X(p) - x(0) + (2-i)X(p) = \frac{1}{p-2-i}$$

Siendo $x(0) = 0$:

$$(p+2-i)X(p) = \frac{1}{p-2-i}, \qquad X(p) = \frac{1}{(p+2-i)(p-2-i)}.$$

Ej.3 d) De la parte c) sabemos la transformada de Laplace $X(p)$ de la función solución $x(t)$. Para antitransformarla, y hallar $x(t)$, primero la descomponemos en fracciones simples:

$$X(p) = \frac{1}{(p+2-i)(p-2-i)} = \frac{-(1/4)}{p+2-i} + \frac{(1/4)}{p-2-i} = -\frac{1}{4}\left[\mathcal{L}\left(e^{(-2+i)\,t}\right)\right](p) + \frac{1}{4}\left[\mathcal{L}\left(e^{(2+i)\,t}\right)\right](p).$$

$$x(t) = \frac{1}{4}\,e^{(-2+i)\,t} + \frac{1}{4}\,e^{(2+i)\,t}.$$