Examen de Funciones de Variable Compleja.

17 de febrero de 2011.

Núm. examen	Apellido y nombre	Cédula de Identidad

Nota: Cada parte vale 10 puntos, con un máximo de 100. El mínimo para aprobar es 50 puntos. La duración del examen es de 3 horas y media.

1. Sea a un número real no nulo.

   a) Hallar todos los complejos z tales que $z^3 = a^3\, i$. Encontrar las partes reales e imaginarias de todas las soluciones z. Podrá usarse la siguiente tabla:
   $$\cos(\pi/3) = \operatorname{sen}(\pi/6) = 1/2, \quad \cos(\pi/6) = \operatorname{sen}(\pi/3) = \sqrt{3}/2.$$

   b) Hallar algún complejo $w(a)$ tal que $(\,(1+w)/(1-w)\,)^3 = a^3\, i$.

   c) Demostrar que todos los complejos $w = x+iy$ que están en la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ son soluciones de la ecuación $\operatorname{Re}(\,(1+w)/(1-w)\,)^3 = 0$.

   d) Demostrar que en el eje real hay un solo punto que es solución de la ecuación $\operatorname{Re}(\,(1+w)/(1-w)\,)^3 = 0$.

2. Sea Ω un abierto conexo del plano complejo.

   a) Enunciar el teorema de Cauchy-Riemann para funciones holomorfas en Ω.

   b) Probar que si $f \in H(\Omega)$ y si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $f(z)$ es constante.

3. Sea $f(z) = \dfrac{z^2+6}{(z^2+9)(z^2+4)}$

   a) Hallar los residuos de f en cada uno de sus polos.

   b) Calcular $\int_\gamma f(z)\, dz$ donde γ es una curva cerrada tal que
   $$Ind_\gamma(2i) = Ind_\gamma(3i) = 1, \qquad Ind_\gamma(-2i) = Ind_\gamma(-3i) = 0.$$

   c) Calcular, justificando todos los pasos, la integral impropia:
   $$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+6}{(x^2+9)(x^2+4)}\, dx$$

   d) Sea R un número real positivo. Demostrar que
   $$\lim_{R\to+\infty} \int_{\beta_R} f(z)\, dz = 0$$
   donde β_R es el segmento vertical $\{x+iy \in \mathbb{C} : x = 1, -R \le y \le R\}$.