Soluciones del examen de Funciones de Variable Compleja.

17 de febrero de 2011.

1. Sea a un número real no nulo.

   a) Hallar todos los complejos z tales que $z^3 = a^3\, i$. Encontrar las partes reales e imaginarias de todas las soluciones z.

   Solución: En polares, $i = 1_{<\pi/2+2k\pi}$, y si $z = \rho_{<\phi}$, y a es real, entonces $z^3 = \rho^3_{<3\phi} = a^3_{<\pi/2+2k\pi}$. Como la única raíz real del real a^3 es a, se obtiene $z = a_{<\pi/6+2k\pi/3}$, donde k es cualquier número entero. Luego, hay solo tres soluciones, una correspondiente a los valores de k que son múltiplos de 3, otra para los valores de k que son un múltiplo de 3 más el resto 1, y la tercera, para los valores de k que son un múltiplo de 3 más el resto 2: $z_1 = a_{<\pi/6} = \cos\pi/6 + i\,\mathrm{sen}\,\pi/6 = (\sqrt{3}+i)/2$, $\qquad z_2 = a_{<5\pi/6} = \cos 5\pi/6 + i\,\mathrm{sen}\,5\pi/6 = -\cos(\pi - 5\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(\pi - 5\pi/6) = -\cos(\pi/6) + i\,\mathrm{sen}(\pi/6) = (-\sqrt{3}+i)/2$, $\qquad z_3 = a_{<9\pi/6} = a_{<3\pi/2} = -ai$.

   b) Hallar algún complejo $w(a)$ tal que $\left(\,(1+w)/(1-w)\,\right)^3 = a^3\, i$.

   Solución: Si elegimos por ejemplo $z = -ai$, satisface $z^3 = a^3$, luego si hallamos w tal que $(1+w)/(1-w) = -ai$, se tendrá una solución de la ecuación dada. Despejando $w = (1+ai)/(ai-1) = -(1+ai)^2/(1+a^2) = (1-a^2+2ai)/(1+a^2)$.

   c) Demostrar que todos los complejos $w = x+iy$ que están en la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ son soluciones de la ecuación $\mathrm{Re}\left(\,(1+w)/(1-w)\,\right)^3 = 0$.

   Solución: $(1+w)/(1-w) = (1+x+iy)/(1-x-iy) = (1+x+iy)(1-x+iy)/[(1+x)^2+y^2] = [(1+iy)^2 - x^2]/[(1+x)^2+y^2] = [(1-x^2-y^2)+2iy]//[(1+x)^2+y^2]$, que tiene parte real nula si $x^2+y^2 = 1$. Luego, todos los puntos de la circunferencia $x^2+y^2 = 1$, satisfacen $\mathrm{Re}(z) = 0$, donde $z = (\,(1+w)/(1-w)\,) = 0$. Como $\mathrm{Re}(z) = 0$ implica $\mathrm{Re}(z^3) = 0$ (cuidado que el recíproco es falso) hemos probado que los puntos w de la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ satisfacen la ecuación $\mathrm{Re}(z^3) = 0$.

   d) Demostrar que en el eje real hay un solo punto que es solución de la ecuación $\mathrm{Re}\left(\,(1+w)/(1-w)\,\right)^3 = 0$.

   Solución: Si w es real entonces $(1+w)/(1-w)$ también es real, y el único real que elevado al cubo da cero es cero. Luego $(1+w)/(1-w) = 0$, de donde $w = -1$.

2. Sea Ω un abierto conexo del plano complejo.

   a) Enunciar el teorema de Cauchy-Riemann para funciones holomorfas en Ω.

   Solución: Una función compleja $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ de variable compleja $z = x+iy \in \Omega$, es holomorfa (i.e. derivable para todo $z \in \Omega$) si y solo si sus partes real $u(x,y)$ e imaginaria $v(x,y)$, como funciones reales de dos variables reales (x,y) satisfacen las siguientes TRES condiciones para todo $(x,y) \in \Omega$:

   I) – $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son funciones diferenciables, II) – $u_x = v_y$, III) – $u_y = -v_x$.

   b) Probar que si $f \in H(\Omega)$ y si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $f(z)$ es constante.

   Solución: Fijemos un punto $z_0 \in \Omega$. Hay que demostrar que $f(z) = f(z_0)$ donde $z \in \Omega$ es cualquiera. Como Ω es conexo, si tomamos un punto cualquiera $z \in \Omega$ existe un arco $\gamma \subset \Omega$ con extremos en z_0 y z. Siendo $f(z)$ una primitiva de $f'(z)$, podemos aplicar la regla de Barrow: $\int_\gamma f'(z)\,dz = f(z) - f(z_0)$. Por hipótesis $f' = 0$ para todo punto de Ω, luego su integral a lo largo de cualquier curva contenida en Ω da cero. Concluimos que $0 = \int_\gamma f'(z)\,dz = f(z) - f(z_0)$, de donde $f(z) = f(z_0)$, como queríamos demostrar.

3. Sea $f(z) = \dfrac{z^2+6}{(z^2+9)(z^2+4)}$

a) Hallar los residuos de f en cada uno de sus polos.

Solución: Los polos son las raíces del denominador que son todas simples. Usando la fórmula de cálculo de residuos en polos simples $Res_f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$, se obtiene $Res(3i) = ((3i)^2+6)/[(3i+3i)((3i)^2+4)] = -(1/10)i$. Análogamente: $Res(-3i) = (1/10)i$, $Res(2i) = -(1/10)i$, $Res(-2i) = (1/10)i$.

b) Calcular $\int_\gamma f(z)\,dz$ donde γ es una curva cerrada tal que $Ind_\gamma(2i) = Ind_\gamma(3i) = 1$, $\;Ind_\gamma(-2i) = Ind_\gamma(-3i) = 0$.

Solución: Aplicando el teorema de los residuos: $\int_\gamma f(z)\,dz =$
$= 2\pi i \sum_{z_k \text{ polo de z}} Ind_\gamma(z_k)\,Res(z_k) = 2\pi i(-(1/10)i - (1/10)i) = 2\pi(2/10) = 2\pi/5$.

c) Calcular, justificando todos los pasos, la integral impropia:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+6}{(x^2+9)(x^2+4)}\,dx$$

Solución: Sea S_R la semicircunferencia $x = R\cos t$, $y = R\operatorname{sen} t$, $\;0 \le t \le \pi$, orientada para t creciente. Sea $[-R,R]$ el segmento del eje real $-R \le x \le R$ orientado para x creciente, y sea la curva cerrada $\gamma_R = [-R,R] + S_R$. Se cumple: $\int_{\gamma_R} f\,dz = \int_{[-R,R]} f\,dz + \int_{S_R} f\,dz$. $\quad$ (1)

Como γ_R da una sola vuelta en sentido antihorario alrededor de los polos $3i$ y $2i$ de $f(z)$, y no da ninguna vuelta alrededor de los otros dos polos, podemos aplicar la parte b) y resulta $\int_{\gamma_R} = 2\pi/5$. Despejando de la igualdad (1): $\int_{[-R,R]} f\,dz = 2pi/5 - \int_{S_R} f\,dz \quad$ (2).

Además $L = \lim z f(z) = 0$ cuando $|z| \to +\infty$. Por el lema de Jordan o de deformación de curvas, $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f, dz = 0$. Tomando límite en la igualdad (2): $\lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} f\,dz = 2\pi/5$.

Por definición de integral impropia: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} f\,dz = 2\pi/5$.

La función $f(x)$ en el integrando, para x real, es real y PAR, luego la integral de 0 a $+\infty$ es la mitad de la integral entre $-\infty$ y $+\infty$. Concluimos que $I = \pi/5$.

d) Sea R un número real positivo. Demostrar que $\lim_{R\to+\infty} \int_{\beta_R} f(z)\,dz = 0$, donde β_R es el segmento de recta vertical $\{x+iy \in \mathbb{C} : x = 1, \;\; -R \le y \le R\}$.

Solución: Para todo $R > 2$ sea S_R el arco de circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt{1+R^2}$, que pasa por los dos extremos del segmento β_R, que queda a la derecha del segmento vertical β_R. Sea la curva cerrada (orientada en sentido horario) $\gamma_R = \beta_R + S_R$. Como γ_R no encierra ningún polo $\int_{\gamma_R} f\,dz = 0$. Luego $\int_{\beta_R} f\,dz + \int_{S_R} f\,dz = 0$ para todo $R > 2$. Tomando límite cuando $R \to +\infty$ resulta: $\lim \int_{\beta_R} f\,dz + \lim \int_{S_R} f\,dz = 0$. Pero por el lema de deformación de curvas o lema de Jordan, como $\lim_{|z|\to+\infty} z f(z) = 0$, obtenemos $\lim \int_{S_R} f\,dz = 0$. Luego: $\lim_{R\to+\infty} \int_{\beta_R} f\,dz = 0$ como queríamos demostrar.