Examen de Funciones de Variable Compleja.

10 de diciembre de 2011.

Núm. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Nota: Cada parte vale 10 puntos, con un máximo de 100. El mínimo para aprobar es 50 puntos. La duración del examen es de 3 horas y media.

1. Sea Ω un abierto conexo del plano complejo.

   a) Enunciar hipótesis y tesis del teorema de Cauchy-Riemann para funciones holomorfas en un abierto Ω del plano complejo.

   b) Demostrarlo.

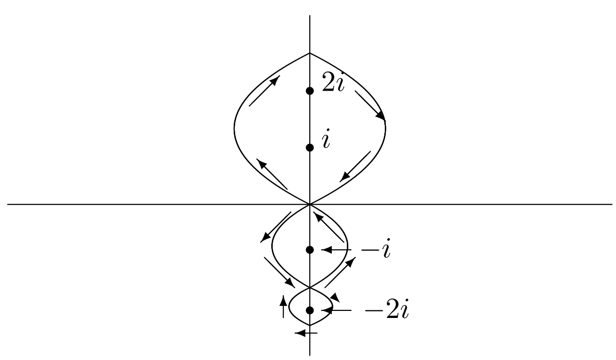
   c) Probar que si $f \in H(\Omega)$, si Ω es abierto y conexo, y si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $f(z)$ es constante.

2. *a*) Definir polo, orden de un polo y residuo $Res_f(z_0)$ de una función meromorfa f en su polo z_0.

   b) Enunciar y demostrar alguna fórmula para calcular $Res_f(z_0)$ cuando z_0 es un polo de orden $m = 1$.

   c) Considérese la función $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2+4}$. Hallar todos sus ceros, sus polos, los órdenes de sus ceros y polos, y el residuo de f en cada uno de sus polos.

   d) Sea la función f definida en la parte c), y sea la curva γ de la figura, diferenciable a trozos. Calcular $I = \int_\gamma f(z)\, dz$.



3. *a*) Enunciar el principio del módulo máximo.

   b) Demostrarlo.

   c) Sea Ω un abierto conexo del plano complejo que contiene al disco cerrado $\overline{D}$ de centro en el origen y radio 1. Sea $f \in H(\Omega)$ tal que $|f(z)| \leq 3 \ \forall \ z \in \overline{D}$. Se denota ∂D a la circunferencia borde de $\overline{D}$. Probar que si $\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z}\, dz = 6\pi$, entonces $f(z)$ es constante para todo $z \in \Omega$.