Soluciones del examen de Funciones de Variable Compleja.

10 de diciembre de 2011.

Ejercicio 1.
Sea Ω un abierto conexo del plano complejo.

Parte a) Enunciar hipótesis y tesis del teorema de Cauchy-Riemann para funciones holomorfas en un abierto Ω del plano complejo.

Respuesta: Ver Teorema 2.1.6 del texto "Funciones de Variable Compleja", capítulo 2, página 19, en http://www.fing.edu.uy/imerl/varcompleja/2006/notas/Cauchy2.pdf

Parte b) Demostrarlo

Respuesta: Ver Demostración del Teorema 2.1.6 del texto "Funciones de Variable Compleja, Capítulo 2, páginas 20 y 21, en el mismo enlace indicado arriba.

Parte c) Probar que si $f \in H(\Omega)$, si Ω es abierto y conexo, y si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, entonces $f(z)$ es constante.

Respuesta: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ donde $z = x + iy$, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. Siendo $f'(z) = u_x + iv_x$, y por hipótesis $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, tenemos $u_x = 0,\ v_x = 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$. Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann $v_y = u_x = 0,\ \ v_x = -u_y = 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$. Elijamos un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$ y dejémoslo fijo. Para todo otro punto $(x_1, y_1) \in \Omega$, siendo Ω conexo, existe un camino $\gamma \subset \Omega$ con extremos en (x_0, y_0) y (x_1, y_1). Para cualquier función escalar (potencial) $u(x,y)$ de clase C^1 en Ω, la integral curvilínea del campo (u_x, u_y) a lo largo de un camino $\gamma \subset \Omega$ es igual a la diferencia de potencial en sus extremos: $u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) = \int u_x\,dx + u_y\,dy$. En nuestro caso u_x y u_y son idénticamente nulas en Ω, luego son cero a lo largo de γ, y la integral curvilínea da 0: $u(x_1, y_1) - u(x_0, y_0) = 0$. Como eso vale para todo $(x_1, y_1) \in \Omega$, resulta $u(x,y) = k$, constante real, para todo $(x,y) \in \Omega$ siendo $k = u(x_0, y_0)$. Análogamente, siendo v_x y v_y idénticamente nulas en Ω, se deduce $v(x,y) = h$, constante real, para todo $(x,y) \in \Omega$. Luego $f(x + iy) = u(x,y) + iv(x,y) = k + ih$, constante compleja, para todo $z = x + iy \in \Omega$.

Ejercicio 2.

Parte a) Definir polo, orden de un polo y residuo $Res_f(z_0)$ de una función meromorfa f en su polo z_0.

Respuesta: Sea f meromorfa en el abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$. Sea $z_0 \in \Omega$ y sea $D^*_R(z_0) = \{z \in \Omega :\ 0 \neq |z - z_0| < R\} \subset \Omega$. Se dice que z_0 es un polo de f si $f \in H(D^*_R(z_0))$ (es decir z_0 es una singularidad aislada de f) y además $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. El orden del polo z_0 es el único número entero $m \geq 1$ tal que $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z) = L \in \mathbb{C},\ L \neq 0$. Residuo de f en el polo z_0 es $Res_f(z_0) = [1/(2\pi i)] \int_\gamma f(z)\,dz$ donde $\gamma \subset D^*_R(z_0)$ es un camino cerrado tal que $Ind_\gamma(z_0) = 1$.

Parte b) Enunciar y demostrar alguna fórmula para calcular $Res_f(z_0)$ cuando z_0 es un polo de orden $m = 1$.

Respuesta: Si z_0 es un polo simple de f, entonces $Res_f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z)$. Demostración: El orden del polo por hipótesis es $m = 1$. Luego, por definición de orden $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = L \in \mathbb{C}$. Sea $g(z) = (z - z_0)\,f(z)$. Siendo $\lim_{z\to z_0} g(z) = L \in \mathbb{C}$, el punto z_0 es un singularidad evitable de g. Luego, existe una extensión analítica, que seguimos llamando g, a $D_R(z_0)$, y esta extensión analítica cumple $g(z_0) = \lim_{z\to z_0} g(z) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)\,f(z)$.

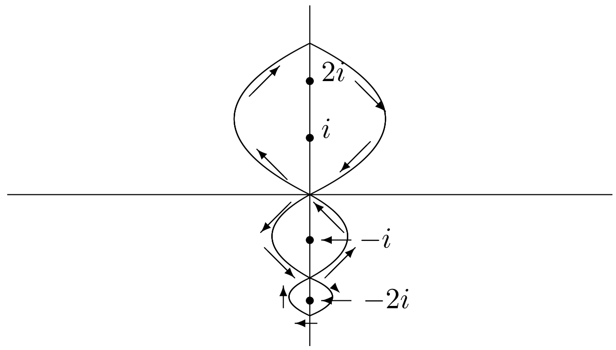
Por la fórmula de Cauchy, para toda curva cerrada $\gamma \subset D_R(z_0)$ tal que $Ind_\gamma(z_0) = 1$, tenemos $[1/(2\pi i)] \int_\gamma g(z)/(z - z_0)\,dz = g(z_0)$. Luego $g(z_0) = [1/(2\pi i)] \int_\gamma (z - z_0)f(z)/(z - z_0)\,dz = [1/(2\pi i)] \int_\gamma f(z)\,dz$. Esta última integral es por definición el residuo de f en el polo z_0. Concluimos que $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)\,f(z) = g(z_0) = Res_f(z_0)$, como queríamos demostrar.

Parte c) Considérese la función $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z^2 + 4}$. Hallar todos sus ceros, sus polos, los órdenes de sus ceros y polos, y el residuo de f en cada uno de sus polos.

Respuesta: $f(z) = [(z - i)(z + i)]/[(z - 2i)(z + 2i)]$, tiene dos ceros simples en i y $-i$, y dos polos simples en $2i$ y $-2i$. $\quad Res_f(2i) = \lim_{z\to 2i}(z - 2i)\,f(z) = \lim_{z\to 2i} \dfrac{(z - i)(z + i)}{z + 2i} = \dfrac{-3}{4i} = \dfrac{3i}{4}$.

$Res_f(-2i) = \lim_{z\to -2i}(z + 2i)\,f(z) = \lim_{z\to 2i} \dfrac{(z - i)(z + i)}{z - 2i} = \dfrac{-3}{-4i} = \dfrac{-3i}{4}$.

Parte d) Sea la función f definida en la parte c), y sea la curva γ de la figura, diferenciable a trozos. Calcular $I = \int_\gamma f(z)\,dz$.



Respuesta: Aplicando el teorema de los residuos:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i[Res_f(2i)Ind_\gamma(2i) + Res_f(-2i)Ind_\gamma(-2i)] = 2\pi i[(3/4)i(-1) - (3/4)i(-1)] = 0$$

Ejercicio 3.

Parte a) Enunciar el principio del módulo máximo.

Respuesta: Ver Capítulo 8 del texto "Funciones de Variable Compleja", página 77 Teorema 8.1.2 o página 78, Corolario 8.1.3, en:

http://www.fing.edu.uy/imerl/varcompleja/2006/notas/Cauchy8.pdf

Parte b) Demostrarlo.

Respuesta: Ver demostración del Teorema 8.1.2 en la página 77 del texto mencionado arriba.

Parte c) Sea Ω un abierto conexo del plano complejo que contiene al disco cerrado $\overline{D}$ de centro en el origen y radio 1. Sea $f \in H(\Omega)$ tal que $|f(z)| \leq 3\ \forall\ z \in \overline{D}$. Se denota ∂D a la circunferencia borde de $\overline{D}$. Probar que si $\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z}\,dz = 6\pi$, entonces $f(z)$ es constante para todo $z \in \Omega$.

Respuesta: Por el teorema de Cauchy aplicado a $f \in H(\Omega)$: $\quad 2\pi i\, f(0) = \displaystyle\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z}\,dz = 6\pi.$

Entonces $f(0) = 3/i = -3i, \quad |f(0)| = 3$. Como $|f(z)| \leq 3$ para todo z en $\overline{D}$, entonces $\max_{z\in\overline{D}} |f(z)| \leq 3$. Pero $0 \in \overline{D}, \ \ |f(0)| = 3$, entonces el máximo de f en $\overline{D}$ es 3 y se alcanza, entre otros puntos en $0 \in \text{int}(D)$. Luego $f(0)$ es un máximo local. Por el principio del módulo máximo f es constante en Ω.