Examen de Funciones de Variable Compleja.

Julio de 2010.

Núm. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Nota: Cada parte vale 10 puntos, con un máximo de 130. El mínimo para aprobar es 78 puntos. La duración del examen es de 3 horas y media.

1. *a*) Demostrar que $f(z) = |z|$ no es derivable para ningún $z_0 \in \mathbb{C}$.
   b) Demostrar que $g(z) = |z|^2$ es derivable en $z_0 = 0$ y calcular su derivada $g'(0)$.
   c) Demostrar que $g(z) = |z|^2$ no es derivable para ningún $z_0 \neq 0$.

2. Consideremos $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Hallar el número de raíces con parte real positiva de la ecuación $a - z - e^{-z} = 0$.

3. Sea $f(t)$ la función compleja de variable real t definida por:

$$f(t) = (2+i)e^{5it} \text{ si } t \geq 0, \quad f(t) = 0 \text{ si } t < 0.$$

   a) Calcular la transformada de Laplace $F(p)$ de $f(t)$, justificando el cálculo.
   b) Encontrar la función convolución $(f * f)(t)$ para $t \geq 0$.
   c) Hallar la transformada de Laplace $G(p)$ de $(f * f)(t)$ justificando la respuesta.
   d) Sin usar la fórmula general de derivación de transformadas de Laplace, demostrar que la derivada $F'(p)$ de la función compleja encontrada en la parte a) es igual a la transformada de Laplace de $-tf(t)$.
   (Sugerencia: Derivar la función $F(p)$ hallada en la parte a) y comparar con la función $G(p)$ hallada en la parte c).)

4. Sea $\gamma_r = \{z : z = z_0 + re^{it},\ 0 \leq t \leq \pi\}$ orientada en sentido antihorario.

   a) Probar que si f es continua en un conjunto Ω que contiene a γ_r para todo $r > 0$ suficientemente pequeño, y si $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)f(z) = L$ entonces $\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = i\pi L$.

   Sean a, b reales positivos, consideramos $g(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$. En adelante γ_r será la curva definida al comienzo con $z_0 = 0$.

   b) Calcular $\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} g(z)\, dz$.
   c) Hallar los polos y residuos de g.
   d) Probar que $\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma_r} g(z)\, dz = 0$.
   e) Calcular:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t\,(t^2 + b^2)}\, dt\,.$$

   (Sugerencia: Considerar la integral de g sobre la curva $\Gamma_{r,R} = [r, R] + \gamma_R + [-R, -r] - \gamma_r$ siendo r suficientemente pequeño y R suficientemente grande).