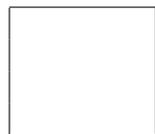


## Examen de Funciones de Variable Compleja.

Julio de 2010.



Núm. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

**Nota:** Cada parte vale 10 puntos, con un máximo de 130. El mínimo para aprobar es 78 puntos. La duración del examen es de 3 horas y media.

- Demstrar que  $f(z) = |z|$  no es derivable para ningún  $z_0 \in \mathbb{C}$ .
  - Demstrar que  $g(z) = |z|^2$  es derivable en  $z_0 = 0$  y calcular su derivada  $g'(0)$ .
  - Demstrar que  $g(z) = |z|^2$  no es derivable para ningún  $z_0 \neq 0$ .
- Consideremos  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 1$ . Hallar el número de raíces con parte real positiva de la ecuación  $a - z - e^{-z} = 0$ .
- Sea  $f(t)$  la función compleja de variable real  $t$  definida por:

$$f(t) = (2 + i)e^{5it} \text{ si } t \geq 0, \quad f(t) = 0 \text{ si } t < 0.$$

- Calcular la transformada de Laplace  $F(p)$  de  $f(t)$ , justificando el cálculo.
  - Encontrar la función convolución  $(f * f)(t)$  para  $t \geq 0$ .
  - Hallar la transformada de Laplace  $G(p)$  de  $(f * f)(t)$  justificando la respuesta.
  - Sin usar la fórmula general de derivación de transformadas de Laplace, demostrar que la derivada  $F'(p)$  de la función compleja encontrada en la parte a) es igual a la transformada de Laplace de  $-tf(t)$ .  
(Sugerencia: Derivar la función  $F(p)$  hallada en la parte a) y comparar con la función  $G(p)$  hallada en la parte c.)
4. Sea  $\gamma_r = \{z : z = z_0 + re^{it}, 0 \leq t \leq \pi\}$  orientada en sentido antihorario.

- Probar que si  $f$  es continua en un conjunto  $\Omega$  que contiene a  $\gamma_r$  para todo  $r > 0$  suficientemente pequeño, y si  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = L$  entonces  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} f(z) dz = i\pi L$ .

Sean  $a, b$  reales positivos, consideramos  $g(z) = \frac{e^{iaz}}{z(z^2 + b^2)}$ . En adelante  $\gamma_r$  será la curva definida al comienzo con  $z_0 = 0$ .

- Calcular  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\gamma_r} g(z) dz$ .
- Hallar los polos y residuos de  $g$ .
- Probar que  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_r} g(z) dz = 0$ .
- Calcular:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t(t^2 + b^2)} dt.$$

(Sugerencia: Considerar la integral de  $g$  sobre la curva  $\Gamma_{r,R} = [r, R] + \gamma_R + [-R, -r] - \gamma_r$  siendo  $r$  suficientemente pequeño y  $R$  suficientemente grande).