Examen de Funciones de Variable Compleja.
Soluciones.

Julio de 2010.

Ejercicio 1. **(a)** Demostrar que $f(z) = |z|$ no es derivable para ningún $z \in \mathbb{C}$.

Respuesta (a): Fijemos cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$. Supongamos por absurdo que existe $L = \lim_{z\to z_0} \dfrac{|z| - |z_0|}{z - z_0}$.
Primer caso: Si $z_0 \neq 0$: Entonces tomando en particular $z = z_0 + tz_0$ donde $t \in \mathbb{R}$, se cumple $L = \lim_{t\to 0} \dfrac{|z_0 + tz_0| - |z_0|}{tz_0} = \dfrac{|z_0|}{z_0} \lim_{t\to 0} \dfrac{|1+t| - 1}{t}$. Por un lado, como $t \to 0$ el número real $1 + t > 0$, entonces $|1 + t| = 1 + t$. Como $z_0 \neq 0$ es fijo se tiene: $L = \lim_{t\to 0^+} \dfrac{|z_0|}{z_0} \dfrac{1+t-1}{t} = \dfrac{|z_0|}{z_0}$.
Consideremos ahora $z = z_0 e^{it}$ donde $t \in \mathbb{R}$. Se cumple:
$L = \lim_{t\to 0} \dfrac{|z_0 e^{it}| - |z_0|}{z_0 e^{it} - z_0} = \lim_{t\to 0} \dfrac{0}{z_0 e^{it} - z_0} = \lim_{t\to 0} 0 = 0$. Luego $L = |z_0|/z_0 = 0$, de donde $|\, z_0/|z_0|\, | = |0|$, $\Rightarrow 1 = 0$, lo que es absurdo. Hemos probado que la función $f(z) = |z|$ no es derivable en ningún punto $z_0 \neq 0$.
Segundo caso: Si $z_0 = 0$, entonces por hipótesis de absurdo existe el complejo $L = \lim_{z\to 0} |z|/z$. Tomando en particular $z = t \in \mathbb{R}$, resulta:
$L = \lim_{t\to 0^+} |t|/t = 1$ (pues $t \to 0^+ \;\Rightarrow\; t > 0 \;\Rightarrow\; |t| = t \;\Rightarrow\; |t|/t = 1$).
$L = \lim_{t\to 0^-} |t|/t = -1$ (pues $t \to 0^- \;\Rightarrow\; t < 0 \;\Rightarrow\; |t| = -t \;\Rightarrow\; |t|/t = -1$). Luego $L = 1 = -1$, lo que es absurdo. Hemos probado que la función $f(z) = |z|$ no es derivable en el punto $z_0 = 0$. $\square$

(b) Demostrar que $g(z) = |z|^2$ es derivable en $z_0 = 0$ y calcular su derivada $g'(0)$.

Respuesta (b): Demostremos que para $z_0 = 0$ existe $L = \lim_{z\to 0} \dfrac{|z|^2 - 0}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \dfrac{z\overline{z}}{z} = \lim_{z\to 0} \overline{z} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x - iy) = 0$. Luego $g(z) = |z|^2$ es derivable en $z_0 = 0$ y $g'(0) = 0$.

(c) Demostrar que $g(z) = |z|^2$ no es derivable para ningún $z_0 \neq 0$.

Respuesta (c): Hay que probar que para $z_0 \neq 0$ no existe el límite del cociente incremental de $g(z)$ en $z = z_0$. Supongamos por absurdo que existe $L = \lim_{z\to z_0} \dfrac{|z|^2 - |z_0|^2}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \dfrac{(|z| - |z_0|)(|z| + |z_0|)}{z - z_0}$. Luego $\dfrac{L}{2|z_0|} = \lim_{z\to z_0} \dfrac{(|z| - |z_0|)(|z| + |z_0|)}{z - z_0} \dfrac{1}{(|z| + |z_0|)} = \lim_{z\to z_0} \dfrac{|z| - |z_0|}{z - z_0}$ Este último límite, es el cociente incremental de la función $f(z) = |z|$. Por lo la función $f(z) = |z|$ sería derivable en $z_0 \neq 0$ y su derivada valdría $\dfrac{L}{2|z_0|}$ lo que contradice la parte a), absurdo. $\square$

Ejercicio 2. Consideremos $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Hallar el número de raíces con parte real positiva de la ecuación $a - z - e^{-z} = 0$.

Respuesta:
Sea $\gamma_R = \{z : z = Re^{it},\ -\pi/2 \leq t \leq \pi/2\}$ orientada en sentido horario y Γ_R la curva cerrada que resulta de concatenar a γ_R el segmento $[-iR, iR]$. Tomamos $R > a + 1$.

Entonces si $z \in \Gamma_R$ se tiene que $|z - a| > 1$.

Ahora bien, utilizamos el teorema de Rouché con $a - z$ y $a - z - e^{-z}$, ya que ambas son funciones holomorfas y sobre Γ_R se cumple que:

$$|a - z - e^{-z} - (a - z)| = |e^{-z}| = e^{-Re(z)} \leq 1 < |a - z|.$$

Entonces $a - z - e^{-z} = 0$ tiene una única solución en el interior de Γ_R; como podemos tomar R arbitrariamente grande, hay una única solución de la ecuación en el semiplano $Re(z) > 0$.

Ejercicio 3. Sea $f(t)$ la función compleja de variable real t definida por: $f(t) = (2+i)e^{5it}$ si $t \geq 0$, $\quad f(t) = 0$ si $t < 0$. **(a)** Calcular la transformada de Laplace $F(p)$ de $f(t)$, justificando el cálculo.

Respuesta (a): $F(p) = \int_0^{+\infty}(2+i)e^{5it}e^{-pt}\,dt = \int_0^{+\infty}(2+i)e^{(5i-p)t}\,dt = (2+i)\lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{(5i-p)t}\,dt =$
$= \dfrac{2+i}{5i-p}\lim\limits_{T\to+\infty}(1 - e^{(5i-p)T}) = F(p)$ Observando que, cuando $T \to +\infty$ la función: $|e^{(5i-p)T}| = e^{-Re(p)T}$ tiende a cero si $Re(p) > 0$, y tiende a infinito si $Re(p) > 0$, se deduce que la integral impropia calculada antes, que define la transformada de Laplace $F(p)$ es convergente y su valor es $F(p) = \dfrac{2+i}{5i-p}$, si $Re(p) > 0$, y no converge si $Re(p) < 0$. Luego el semiplano de convergencia de $F(p)$ es $Re(p) > 0$.

(b) Encontrar la función convolución $(f * f)(t)$ para $t \geq 0$.

Respuesta (b): Por definición de convolución, para todo $t \geq 0$: $(f * f)(t) = \int_0^t f(x)\cdot f(t-x)\,dx =$
$= \int_0^t (1+i)^2 e^{5ix}e^{5it}e^{-5ix}\,dx = (1+i)^2\, e^{5it}\,\int_0^t 1\,dx = (1+i)^2 te^{5it}$.

(c) Hallar la transformada de Laplace $G(p)$ de $(f * f)(t)$ justificando la respuesta.

Respuesta (c): La fórmula de transformada de Laplace de la convolución es $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(g)$ para toda pareja de funciones $f(t)$, $g(t)$ Laplace- transformables. Luego, aplicando dicha fórmula al caso particular $f(t) = g(t) = (1+i)e^{5it}$ si $t \geq 0$, y usando la parte (b) y al final la parte (a), se obtiene:

$$\mathcal{L}((1+i)^2te^{5it}) = \mathcal{L}(f * f) = \mathcal{L}(f)\cdot\mathcal{L}(f) = F(p)\cdot F(p) = \frac{(2+i)^2}{(5i-p)^2}.$$

(d) Sin usar la fórmula general de derivación de transformadas de Laplace, demostrar que la derivada $F'(p)$ de la función compleja encontrada en la parte a) es la transformada de Laplace de $-tf(t)$ (sin usar la fórmula de la derivada de la transformada de Laplace).

Respuesta (d): En el caso particular de la función $f(t)$ de la parte a) y de su transformada de Laplace $F(p)$ se obtiene: $f(t) = (1+i)e^{5it}$, $\quad F(p) = \mathcal{L}((1+i)e^{5it}) = \dfrac{2+i}{5i-p}$.

Derivando respecto de p: $\quad F'(p) = \dfrac{-(2+i)}{(5i-p)^2}. \qquad (1)$

Usando el resultado de la parte (c): $\mathcal{L}((1+i)^2te^{5it}) = \dfrac{(2+i)^2}{(5i-p)^2}$. Luego, dividiendo entre $1+i$:

$$\mathcal{L}((1+i)te^{5it}) = \frac{(2+i)}{(5i-p)^2}. \qquad (2)$$

Reuniendo las igualdades (2) y (1), se deduce:

$$F'(p) = \frac{(2+i)}{(5i-p)^2} = \mathcal{L}((1+i)te^{5it}) = \mathcal{L}(-tf(t)). \quad \square$$

Ejercicio 4. (a): Probar que si f es continua en un conjunto Ω que contiene a γ_r para todo $r > 0$ suficientemente pequeño, y si $\lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z) = L$ entonces $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} f(z)\,dz = i\pi L$.

Respuesta (a): Ver lemas de deformación de caminos en teórico.

(b): Calcular $\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} g(z)\,dz$.

Respuesta (b): Utilizando la parte a) se obtiene:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} g(z)\,dz = \frac{i\pi}{b^2}$$

(c): Hallar los polos y residuos de g.

Respuesta (c): g tiene polos simples en 0, ib, $-ib$; los residuos son respectivamente: $\frac{1}{b^2}$, $\frac{e^{-ab}}{-2b^2}$, $\frac{e^{ab}}{-2b^2}$.

(d): Probar que $\lim_{r\to+\infty}\int_{\gamma_r} g(z)\,dz = 0$.

Respuesta (d): Utilizando el lema de Jordan se prueba que el límite es 0 (ver ejercicio 9 del práctico 6 y teórico). A saber: Sea

$$\Gamma_R = \{z : z = Re^{it},\ \theta_1 \leq t \leq \theta_2\}$$

donde $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$. Si f es continua en un conjunto Ω que contiene a γ_R para todo $R > 0$ suficientemente grande, y si $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ entonces $\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} e^{imz} f(z)\,dz = 0$ para todo $m > 0$.

(e): Calcular:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t\,(t^2+b^2)}\,dt\,.$$

Respuesta (e): Aplicando el teorema de residuos a g para r pequeño y R suficientemente grande a la curva $\Gamma_{r,R}$ y luego tomando límite cuando $R \to +\infty$ y $r \to 0$ y utilizando las partes b) y d) para calcular los límites sobre las semicircunferencias, se obtiene que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(at)}{t\,(t^2+b^2)}\,dt \;=\; \frac{\pi}{2b^2}(1-e^{-ab}).$$