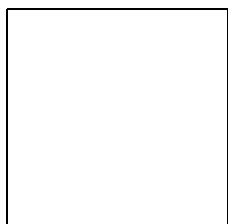


# Examen de Funciones de Variable Compleja.

24 de febrero de 2010.



N. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

1.
  - a) Encontrar una función holomorfa que transforme la faja vertical  $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re}(z) < 1\}$  en el semiplano  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ . (Sugerencia: considerar la exponencial compleja restringida a una faja adecuada para que sea inyectiva)
  - b) Sean  $a$  y  $b$  dos complejos diferentes. Llamemos  $\Omega$  al conjunto que resulta de quitarle el segmento  $[a, b]$  al plano complejo. Hallar una función holomorfa que transforme  $\Omega$  en el plano complejo menos la semirecta  $\{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$ . (Sugerencia: Buscar una función de Möbius que transforme la recta que contiene al segmento  $[a, b]$  en la recta  $y = 0$ .)
  - c) Mostrar que existe una función holomorfa que lleva  $\Omega$  en el disco unitario. (Recordar que la raíz cuadrada, con argumento adecuado, transforma el plano complejo menos una semirecta en un semiplano abierto.)

2. Sea

$$f(z) = \frac{z^2 + 2}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)}$$

- a) Encontrar los residuos de  $f(z)$  en cada uno de sus polos.
- b) Calcular

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)} dx$$

3. Sea  $P(z) = z^9 + 3z^7 + 2^7$ .

- a) Probar que si  $z = 2e^{2k\pi i/7}$  para algún  $k$  entero, entonces  $|P(z)| > 0$ . Sugerencia: Por absurdo concluir que  $(z/2)^2 = -1$ , y que esto contradice la hipótesis.
- b) Probar que si  $|z| = 2$ ,  $z \neq 2e^{2k\pi i/7}$  para todo  $k$  entero, entonces  $|3z^7 + 2^7| < 2^9$ . Sugerencia: La longitud de un lado de un triángulo que no degenera en un segmento, es estrictamente menor que la suma de los otros dos.
- c) Probar que todas las raíces complejas de  $P(z)$  tienen módulo menor que 2. Sugerencia: Aplicar el teorema de Rouché comparando con  $Q(z) = -z^9$