Examen de Funciones de Variable Compleja.

24 de febrero de 2010.

N. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

1. *a*) Encontrar una función holomorfa que transforme la faja vertical $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathcal{R}e(z) < 1\}$ en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) > 0\}$. (Sugerencia: considerar la exponencial compleja restringida a una faja adecuada para que sea inyectiva)

   b) Sean a y b dos complejos diferentes. Llamemos Ω al conjunto que resulta de quitarle el segmento $[a, b]$ al plano complejo. Hallar una función holomorfa que transforme Ω en el plano complejo menos la semirecta $\{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$. (Sugerencia: Buscar una función de Möbius que transforme la recta que contiene al segmento $[a, b]$ en la recta $y = 0$.)

   c) Mostrar que existe una función holomorfa que lleva Ω en el disco unitario. (Recordar que la raíz cuadrada, con argumento adecuado, transforma el plano complejo menos una semirrecta en un semiplano abierto.)

2. Sea
$$f(z) = \frac{z^2 + 2}{(z^2 + 9)(z^2 + 4)}$$

   a) Encontrar los residuos de $f(z)$ en cada uno de sus polos.

   b) Calcular
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 9)(x^2 + 4)}\, dx$$

3. Sea $P(z) = z^9 + 3z^7 + 2^7$.

   a) Probar que si $z = 2\,e^{2k\pi i/7}$ para algún k entero, entonces $|P(z)| > 0$. Sugerencia: Por absurdo concluir que $(z/2)^2 = -1$, y que esto contradice la hipótesis.

   b) Probar que si $|z| = 2$, $z \neq 2\,e^{2k\pi i/7}$ para todo k entero, entonces $|3z^7 + 2^7| < 2^9$. Sugerencia: La longitud de un lado de un triángulo que no degenera en un segmento, es estrictamente menor que la suma de los otros dos.

   c) Probar que todas las raíces complejas de $P(z)$ tienen módulo menor que 2. Sugerencia: Aplicar el teorema de Rouché comparando con $Q(z) = -z^9$