Soluciones del examen de Funciones de Variable Compleja

del 24 de febrero de 2010.

1.a) Encontrar una función holomorfa que transforme la faja vertical $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathcal{R}e(z) < 1\}$ en el semiplano $\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) > 0\}$. Solución: Hay muchas soluciones posibles, usando la sugerencia, una solución es $w = e^{i(\pi/2)\,z}$. **1.b)** Sean a y b dos complejos diferentes. Llamemos Ω al conjunto que resulta de quitarle el segmento $[a, b]$ al plano complejo. Hallar una función holomorfa que transforme Ω en el plano complejo menos la semirecta $\{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$. Solución: Hay muchas soluciones posibles, por ejemplo la transformación de Möbius que lleva $z = b \mapsto w = 0$, $z = a \mapsto w = \infty$, $z = \infty \mapsto w = 1$, que tiene la expresión $w = (z-b)/(z-a)$. **1.c)** Mostrar que existe una función holomorfa que lleva Ω en el disco unitario. Solución: Sea $w = f(z) : \Omega \mapsto \Omega' = \mathbb{C} \setminus \{(x, y) : y = 0, x \leq 0\}$ la función holomorfa de la parte b). La raiz cuadrada $\sqrt{w} : \Omega' \mapsto \{(x, y) : y > 0\}$ definida de modo que $\arg(\sqrt{w}) = (1/2) \arg_{(-\pi,\pi)} w$ es holomorfa. Por otra parte existe una función de Möbius g que transforma holomórficamente el semiplano $\{(x, y) : y > 0\}$ en el disco unitario D. Luego la composición $g(\sqrt{f(z)}) : \Omega \mapsto D$ es holomorfa por ser composición de funciones holomorfas.

2.a) Sea $f(z) = (z^2 + 2)/((z^2 + 9)(z^2 + 4))$. Encontrar los residuos de $f(z)$ en cada uno de sus polos. Solución: Los polos son $2i, -2i, 3i, -3i$ simples. El residuo de un polo simple z_0 es $Res_f(z_0) = 1 \,/\, ((1/f)'(z_0))$. $(1/f(z))' = 2z(2z^2 + 13)/(z^2 + 2) - 2z(z^2 + 9)(z^2 + 4)/(z^2 + 2)^2$. En $z = 3i$, $(1/f)'(3i) = (30/7)i$, $Res_f(3i) = -(7/30)i$. En $z = -3i$, $(1/f)'(-3i) = -(30/7)i$, $Res_f(-3i) = (7/30)i$. En $z = 2i$, $(1/f)'(2i) = -10i$, $Res_f(2i) = (1/10)i$. En $z = -2i$, $(1/f)'(-2i) = 10i$, $Res_f(-2i) = -(1/10)i$.

2.b) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 + 2/((x^2 + 9)(x^2 + 4))\, dx$. Solución: Sea S_R la circunferencia de centro en el origen y radio $R > 0$. Por el lema de Jordan $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = 0$. (1).

$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\, dx = \frac{1}{2} \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\, dx$. (2)

Sea $\gamma = [-R, R] + S_R$, orientada en sentido antihorario. Por el teorema de los residuos:

$\int_{[-R,R]} f(z)\, dz + \int_{S_R} f(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \,(Res_f(2i)\, Ind_\gamma(2i) + Res_f(3i)\, Ind_\gamma(2i)) =$

$= 2\pi i(\frac{-7i}{30} + \frac{i}{10}) = \frac{4}{15}\,\pi$. Luego: $\int_{[-R,R]} f(z)\, dz = -\int_{S_R} f(z)\, dz + \frac{4}{15}\,\pi$. (3)

$\lim_{R\to+\infty} \int_{[-R,R]} f(z)\, dz = -\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz + \frac{4}{15}\,\pi$. Usando (1),(2) y (3): $I = \frac{2}{15}\,\pi$.

3.a) Sea $P(z) = z^9 + 3z^7 + 2^7$. Probar que si $z = 2\, e^{2k\pi i/7}$ para algún k entero, entonces $|P(z)| > 0$. Solución: Por absurdo si $P(z) = 0$ para $z = 2e^{2k\pi i/7}$, entonces

$P(z) = \left(2e^{2k\pi i/7}\right)^9 + 3\left(2e^{2k\pi i/7}\right)^7 + 2^7 = 0$. Siendo $\left(e^{2k\pi i/7}\right)^7 = 1$, se deduce:

$P(z) = 2^9 \left(e^{2k\pi i/7}\right)^2 + 4 \times 2^7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2^9 \left(\left(e^{2k\pi i/7}\right)^2 + 1\right) = 0$. Luego $z/2 = e^{2k\pi i/7}$ verifica la ecuación $(z/2)^2 + 1 = 0$, y es por lo tanto raíz séptima de 1 y raíz cuadrada de -1 al mismo tiempo, lo que es absurdo.

3.b) Probar que si $|z| = 2$, $z \neq 2\, e^{2k\pi i/7}$ para todo k entero, entonces $|3z^7 + 2^7| < 2^9$. Solución: Por la propiedad triangular $|w + 2^7| < |w| + 2^7$ si el triángulo con vértices en los puntos 0, 2^7 y $w + 2^7$ no degenera en un segmento. Si $w = 3z^7$ se cumple la desigualdad anterior, porque de lo contrario w sería real positivo, y $|z| = 2$, $z^7 = 2^7(z/2)^7 = \alpha \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow (z/2)^7 = 1 \Rightarrow z = 2\, e^{2k\pi i/7}$ contradiciendo la hipótesis.

3.c) Probar que todas las raíces complejas de $P(z)$ tienen módulo menor que 2. Solución: Usando $Q(z) = -z^9$ probemos que $|P(z) + Q(z)| < |P(z)| + |Q(z)|$ si $|z| = 2$ (1).

$|z| = 2 \Rightarrow |P(z) + Q(z)| = |3z^7 + 2^7| \leq 3|z|^7 + 2^7 = 3 \times 2^7 + 2^7 = 4 \times 2^7 = 2^9 = |Q(z)|$ (2).

Si $z = 2e^{2k\pi/7}$ por la parte a) $|P(z)| > 0$, que sumado al último miembro de la desigualdad (2), implica (1). Si $|z| = 2$, $z \neq 2e^{2k\pi/7}$ por la parte b) $|3z^7 + 2^7| < 2^9$. Esta desigualdad estricta entre el primer y el último miembro de la desigualdad (2), implica (1). Por (1) y el teorema de Rouché, son iguales las cantidades de ceros de $P(z)$ y de $Q(z)$, contados con su multiplicidad, en el disco abierto $|z| < 2$.