Examen de Funciones de Variable Compleja.

Diciembre de 2010.

Núm. examen

____
Apellido y nombre

____
Cédula de Identidad

Nota: Cada parte vale ... puntos, con un máximo de .... El mínimo para aprobar es ... puntos. La duración del examen es de ....

1. Sea Ω una región y $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$.

   a) Demostrar que si $\int_\gamma f = 0$ para toda curva γ cerrada, diferenciable a trozos con traza $\gamma \subset \Omega$, entonces f tiene primitiva.

   b) Demostrar que si f tiene primitiva entonces $\int \gamma f = 0$ para toda vurva γ en las condiciones de la parte a).

   c) Sea $f : D \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{C}: \ f(z) = 1/z$. Demostrar que f no tiene primitiva.

2. Sea $f(z) = \dfrac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+4)}$

   a) Encontrar todos los polos de f y sus órdenes.

   b) Calcular los residuos de f en cada uno de sus polos.

   c) Calcular $\int_\gamma f(z)\,dz$ siendo γ una curva cerrada de Jordan recorrida una sola vez en sentido antihorario y que encierra a todos los polos de f.

   d) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}$ (Justificar todos los pasos).

3. *a*) Encontrar la antitransformada $g(t)$ de Laplace de $G(p) = 2p/(p^2+1)^2$.
   (Sugerencia: Considerar la transformada de Laplace de $\operatorname{sen} t$ y observar que $-G(p)$ es la derivada respecto de p de una función $F(p)$).

   b) Sea la ecuación diferencial con condiciones iniciales

   $$\ddot{x} + x = \cos t, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

   Hallar la transformada de Laplace de $x(t)$.

   c) Encontrar la función $x(t)$ de la parte (b).