Soluciones del Examen de Funciones de Variable Compleja.

Diciembre de 2010.

Ejercicio 1 a). Sea Ω una región y $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$. Demostrar que si $\int_\gamma f = 0$ para toda curva γ cerrada, diferenciable a trozos con traza $\gamma \subset \Omega$, entonces f tiene primitiva.

Solución: Por definición de integral $\int_\gamma f$, la función f es continua. (En caso contrario no está definida la integral de f a lo largo de una curva γ.) Sea $z_0 \in \Omega$. Para cada $z \in \Omega$ sea $\gamma_{z_0,z}$ una curva diferenciable a trozos con traza en Ω, extremo inicial en el punto z_0 y extremo final en el punto z. Existe tal curva debido a que Ω es conexo (una región es un abierto conexo del plano). Considérese el número complejo $G(z)$ definido por:

$$G(z) := \int_{\gamma_{z_0,z}} f(z)\, dz$$

Dicho número solo depende de los puntos z_0 y z y no de la curva $\gamma_{z_0,z}$ elegida como antes. En efecto, si se elige otra curva $\gamma'_{z_0,z} \subset \Omega$ que une el punto z_0 con z, y si se llama γ a la curva cerrada $\gamma_{z_0,z} - \gamma'_{z_0,z}$, entonces usando la hipótesis se obtiene:

$$\int_{\gamma_{z_0,z}} f - \int_{\gamma'_{z_0,z}} = \int_\gamma f = 0.$$

Ahora, para terminar de demostrar que existe primitiva de $f(z)$ en Ω, solo resta probar que $G'(z)$ existe para todo $z \in \Omega$ y que $G'(z) = f(z)$.

Sea B una bola abierta centrada en z y contenida en Ω. Tal bola existe porque Ω es abierto. Sea $z' \in B$ y sea $S \subset B \subset \Omega$ el segmento de recta que une el punto z con z'. Calculemos el cociente incremental siguiente, cuyo límite cuando $z' \to z$, si existe, es por definición $G'(z)$:

$$\frac{G(z') - G(z)}{z' - z} = \frac{\int_{\gamma_{z_0,z}+S} f - \int_{\gamma_{z_0,z}} f}{z' - z} = \frac{\int_S f(w)\, dw}{z' - z}$$

Parametrizando el segmento S: $w(t) = z + t(z' - z)$, $0 \le t \le 1$, y utilizando la definición de integral, se obtiene:

$$\frac{G(z') - G(z)}{z' - z} = \frac{\int_S f(w)\, dw}{z' - z} = \frac{\int_0^1 f(z + t(z' - z)) \cdot (z' - z)\, dt}{z' - z} =$$

$$= \int_0^1 f(z + t(z' - z))\, dt = f(z + \theta_{z'}(z' - z)),$$

donde en la última igualdad usamos el teorema del valor medio del cálculo integral respecto a la variable real t, y $\theta_{z'}$ es un número real intermedio en el intervalo de integración $[0, 1]$. Finalmente, tomando límite cuando $z' \to z$ en la última igualdad, se deduce:

$$G'(z) = \lim_{z' \to z} f(z + \theta_{z'}(z' - z)).$$

Siendo $\theta \in [0, 1]$ acotado, el complejo $u := z + \theta_{z'}(z' - z)$ tiende a z cuando $z' \to z$. Luego, como f es una función continua, se concluye:

$$G'(z) = \lim_{u \to z} f(u) = f(z). \quad \square$$

Ejercicio 1 b). Demostrar que si f tiene primitiva entonces $\int \gamma f = 0$ para toda curva γ en las condiciones de la parte a).

Solución: Si f tiene primitiva G, por la regla de Barrow del cálculo de la integral a lo largo de una curva γ con extremo inicial z_0 y extremo final z_1 se obtiene:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = G(z_1) - G(z_0)$$

Si la curva γ es cerrada, entonces $z_0 = z_1$, luego $G(z_0) = G(z_1)$ y de la regla de Barrow se deduce $\int_\gamma f(z)\, dz = 0$. $\square$

Ejercicio 1 c). Sea $f : D \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{C} : \ f(z) = 1/z$. Demostrar que f no tiene primitiva.
Solución: Por absurdo supongamos que f tiene primitiva. Sea γ una circunferencia de centro en el origen y radio $r > 0$. Usando la parte b) se obtiene:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \qquad (1)$$

Parametrizando la circunferencia $\gamma : \ z = re^{it}\ 0 \leq t \leq 2\pi$, y usando la definición de integral, se obtiene:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) ie^{it}\, dt = i \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot e^{it}\, dt = 2\pi i \neq 0 \qquad (2)$$

La igualdad (1) contradice a la igualdad (2), absurdo. $\square$

Ejercicio 2 a). Sea $f(z) = \dfrac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+4)}$ Encontrar todos los polos de f y sus órdenes.

Solución: Siendo f una función racional (cociente de polinomios sin raíces comunes en el numerador y denominador), los polos de f y sus órdenes, son las raíces y sus multiplicidades del polinomio $(z^2+9)(z^2+4)$ que está en el denominador. Estas son $3i, -3i, 2i, -2i$ todas simples, Luego esos son los polos de f, todos con orden 1.

Ejercicio 2 b). Calcular los residuos de f en cada uno de sus polos.
Solución: La fórmula de cálculo del residuo de f en un polo simple z_0 es:

$$Res_f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int f(z)\, dz = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$$

Aplicando dicha fórmula en cada uno de los polos, se obtiene:

$$Res_f(3i) = \lim_{z \to 3i} \frac{z^2+2}{(z+3i)(z^2+4)} = \frac{-9+2}{6i(-9+4)} = \frac{-7i}{30}.$$

$$Res_f(-3i) = \lim_{z \to -3i} \frac{z^2+2}{(z-3i)(z^2+4)} = \frac{-9+2}{-6i(-9+4)} = \frac{7i}{30}.$$

$$Res_f(2i) = \lim_{z \to 2i} \frac{z^2+2}{(z+2i)(z^2+9)} = \frac{-4+2}{4i(-4+9)} = \frac{i}{10}.$$

$$Res_f(-2i) = \lim_{z\to -2i} \frac{z^2+2}{(z-2i)(z^2+9)} = \frac{-4+2}{-4i(-4+9)} = \frac{-i}{10}.$$

Ejercicio 2 c). Calcular $\int_\gamma f(z)\,dz$ siendo γ una curva cerrada de Jordan recorrida una sola vez en sentido antihorario y que encierra a todos los polos de f.

Solución: Por el teorema de los residuos:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_0\in\mathcal{P}_f} Res_f(z_0)$$

donde $\mathcal{P}_f$ es el conjunto de polos de f encerrados por la curva γ. En nuestro caso $\mathcal{P}_f = \{3i, -3i, 2i, -2i\}$, y usando los resultados de la parte b) del cálculo de residuos en dichos polos, se obtiene:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \left(\frac{-7i}{30} + \frac{7i}{30} + \frac{i}{10} + \frac{-i}{10} \right) = 0$$

Ejercicio 2 d). Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}$ (Justificar todos los pasos).

Solución: Consideremos un número real $R > 4$, el segmento $[-R, R]$ en el eje real del plano complejo, y la semicircunferencia $S_R : z = Re^{it}$ $0 \le t \le \pi$ de centro en el origen y radio R, con parte imaginaria no negativa. Sea $\gamma = [-R, R] + S_R$: es una curva cerrada que encierra solo los polos $2i$ y $3i$ de f. Luego, por el teorema de los residuos:

$$\int_{[-R,R]+S_R} f = \int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \left(\frac{-7i}{30} + \frac{i}{10} \right) = \frac{4\pi}{15}$$

Haciendo $R \to +\infty$ en la igualdad anterior:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx + \lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = \frac{4\pi}{15} \qquad (3)$$

Por el lema de Jordan o de deformación de curvas, siendo $\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$ se obtiene

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)\, dz = 0$$

Sustituyendo en (3) se concluye:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \frac{4\pi}{15}.$$

Ejercicio 3 a). Encontrar la antitransformada $g(t)$ de Laplace de $G(p) = 2p/(p^2+1)^2$.

(Sugerencia: Considerar la transformada de Laplace de $\operatorname{sen} t$ y observar que $-G(p)$ es la derivada respecto de p de una función $F(p)$).

Solución: Si consideramos solo valores reales de la variable p en la transformada de Laplace, obtenemos:

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen} t) = \mathcal{L}(\operatorname{Im}(e^{it})) = \operatorname{Im}(\mathcal{L}(e^{it})) = \operatorname{Im}\frac{1}{p-i} = \operatorname{Im}\left(\frac{p+i}{(p-i)(p+i)} \right) = \frac{1}{p^2+1}.$$

Para p complejo en el semiplano de convergencia de $\mathcal{L}(e^{it}) = 1/p - i$, es decir para todo p en el semiplano $\{p \in \mathbb{C} : Re(p) > 0\}$, la transformada de Laplace de $\operatorname{sen} t$ coincide con $1/(p^2+1)$, pues de la igualdad obtenida antes, $\mathcal{L}(\operatorname{sen} t)$ es una función analítica que coincide con esta última si p es real positivo. Ahora, usando la fórmula de derivada respecto de p de la transformada de Laplace, obtenemos:

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen} t) = \frac{1}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L}(t \operatorname{sen} t) = -[\mathcal{L}(\operatorname{sen} t)]' = -\left(\frac{1}{p^2+1}\right)'$$

donde la derivada en el último término es respecto a la variable compleja p. Luego:

$$\mathcal{L}(t \operatorname{sen} t) = -\frac{-2p}{(p^2+1)^2} = \frac{2p}{(p^2+1)^2} = G(p) \qquad \text{para todo } p \in \mathbb{C} \text{ tal que } Re(p) > 0.$$

Concluimos que la antitransformada de Laplace de $G(p)$ es $g(t) = t \operatorname{sen} t$.

Ejercicio 3 b). Sea la ecuación diferencial con condiciones iniciales

$$\ddot{x} + x = \cos t, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1.$$

Hallar la transformada de Laplace de $x(t)$.

Solución: Transformando Laplace la igualdad de la ecuación de la diferencial, usando la fórmula de transformada de las derivadas $\dot{x}(t)$ y $\ddot{x}(t)$, y llamando $X(p)$ a la transformada de Laplace de $x(t)$, se obtiene:

$$p^2 X(p) - p\, x(0) - \dot{x}(0) + X(p) = \mathcal{L}(\cos t) \qquad (4)$$

La transformada de Laplace de $\cos t$ es, como en la parte a), la parte real de la transformada de Laplace de e^{it} cuando la variable compleja p toma parte reales; es decir: $\mathcal{L}(\cos t) = \frac{p}{p^2+1}$. Sustituyendo esta transformada en la igualdad (4) y las condiciones iniciales dadas:

$$(p^2+1)X(p) - p - 1 = \frac{p}{p^2+1} \quad \Rightarrow \quad X(p) = \frac{1}{p^2+1}\left(\frac{p}{p^2+1} + p + 1\right) = \frac{p + p^3 + p^2 + p + 1}{(p^2+1)^2}$$

Concluimos que

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \frac{p^3 + p^2 + 2p + 1}{(p^2+1)^2}$$

Ejercicio 3 c). Encontrar la función $x(t)$ de la parte (b).

Solución: Según lo obtenido en la parte b):

$$\mathcal{L}(x(t)) = X(p) = \frac{p^3 + p + p^2 + 1 + p}{(p^2+1)^2} = \frac{p(p^2+1) + (p^2+1) + p}{(p^2+1)^2} = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} + \frac{p}{(p^2+1)^2} \qquad (5)$$

Según lo probado en la parte a):

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen} t) = \frac{1}{p^2+1}, \quad \mathcal{L}(\cos t) = \frac{p}{p^2+1}, \quad \mathcal{L}(t \operatorname{sen} t) = \frac{2p}{(p^2+1)^2}.$$

Por lo tanto, antitransformando la igualdad (5) concluimos:

$$x(t) = \cos t + \operatorname{sen} t + \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t.$$

Verificación: $\ddot{x} = -\cos t - \operatorname{sen} t + \cos t - \frac{1}{2} t \operatorname{sen} t$. Luego $ddotx + x = \cos t$ y la función $x(t)$ encontrada verifica la ecuación diferencial. Además también verifica los datos iniciales, pues $x(0) = \cos 0 + \operatorname{sen} 0 + (1/2)0 = 1$, $\dot{x}(t) = -\operatorname{sen} t + \cos t + (1/2) \operatorname{sen} t + (1/2) t \cos t$, $\dot{x}(0) = 1$.