Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

14 de julio de 2009

FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Examen de Julio

SOLUCIONES

I.

1. Sean $\theta_1 < \theta_2$ dos reales fijos el intervalo $[0, 2\pi]$ y $R > 0$. Consideremos el arco de circunferencia γ_R, definido como sigue:
$$\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : z = Re^{it},\, \theta_1 \leq t \leq \theta_2\}.$$
Probar que si f es continua en un conjunto Ω que contiene a γ_R para todo $R > 0$ suficientemente grande, y si $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, entonces $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$.

2. Siendo $a > 0$, calcular
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(a^2+x^2)^3}\,dx.$$
Justificar adecuadamente el cálculo.

SOLUCIONES

1. Sea $\varepsilon > 0$. Observemos que $\theta_2 - \theta_1 > 0$, y que esta cantidad es un real fijo, pues ambos valores están preestablecidos. Como $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$ se tiene que $\exists\, R_0$ tal que si $|z| \geq R_0$ entonces
$$|zf(z)| < \frac{\varepsilon}{\theta_2 - \theta_1}.$$
Tomamos R_0 suficientemente grande como para estar dentro de la región donde f es una función continua, y $R \geq R_0$. Allí tenemos que:
$$\begin{aligned}
|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz| &= |\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(Re^{it})\, iRe^{it}\,dt| \\
&\leq \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(Re^{it})|\,R\,dt \\
&< \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\varepsilon}{\theta_2-\theta_1} \\
&= \varepsilon\,,
\end{aligned}$$
como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se tiene que $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0$.

2. Se puede observar que basta con tomar $a = 1$, en efecto haciendo un cambio de variable t =x/a se tiene que:
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(a^2+x^2)^3}\,dx = \frac{1}{a^3}\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,dt\,.$$
Para calcular esta integral utilizaremos el método de residuos. Calcularemos
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^3}\,dt\,.$$
Utilizando el lema de deformación de caminos probado en la primera parte es sencillo ver que $I = 2\pi Res_i(f)$, ya que el único polo en el semiplano superior está en i y tiene orden 3. Si $g(z)$ es la extensión holomorfa de $f(z)(z-i)^3$ en un abierto que contiene al semiplano superior, entonces en ese se semiplano $g(z) = \frac{z^2}{(z+i)^3}$. Ahora
$$Res_i(f) = g''(i)/2\,.$$

Calculando se tiene que

$$g'(z) = \frac{2z}{(z+i)^3} - \frac{3z^2}{(z+i)^4},$$

y

$$g'(z) = \frac{2}{(z+i)^3} - \frac{12z}{(z+i)^4} + \frac{12z^2}{(z+i)^5}.$$

Finalmente evaluando en i, $Res_i(f) = -i/16$, por tanto $I = \pi/8$, y entonces:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(a^2+x^2)^3}\, dx = \frac{\pi}{16a^3}.$$

II.

1. *Teorema de Rouché*: Sean f y g dos funciones meromorfas en Ω. Sea $\gamma \subset \Omega$ una curva cerrada y simple, homotópica a un punto en Ω y que no pasa por los ceros ni por los polos de f ni de g. Sea Δ la región acotada encerrada por γ. Si
$$|f(z) - g(z)| < |g(z)| \quad \forall z \in \gamma$$
entonces la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f en Δ (contados con su multiplicidad) es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de g en Δ (contados con su multiplicidad).

   Probar el teorema de Rouché. Si utiliza resultados del curso deberá enunciarlos correctamente.

2. Utilizando el teorema de Rouché probar el teorema fundamental del álgebra. Recordemos que este teorema dice que un polinomio de grado n tiene n raíces en $\mathbb{C}$ $(n > 0)$.

3. Considere $P(z) = z^6 + 3z^2 + i$. Probar que los ceros de P están en el anillo $\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$.

4. Calcular la cantidad de ceros de $P(z)$ con módulo menor que uno.

SOLUCIONES

1. Dividiendo la desigualdad de la hipótesis entre $|g(z)| \neq 0$, para $z \in \gamma$, se obtiene:
$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} - 1 \right| < 1$$
Entonces, el cociente $f(z)/g(z)$ no es un número real ≤ 0, para ningún $z \in \gamma$, ya que para todo número real $\lambda \leq 0$ se cumple $|\lambda - 1| = -\lambda - 1 = -|\lambda| - 1$ y no la desigualdad de la hipótesis.
Entonces la función
$$h(z) = Log_{[-\pi,\pi)} \frac{f(z)}{g(z)}$$
está bien definida y es continua y derivable para todo $z \in \gamma$, ya que el número complejo dentro del logaritmo nunca es un real $\lambda \leq 0$. Derivando $h(z)$ se obtiene:
$$h'(z) = \frac{g(z)}{f(z)} \cdot \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)}$$
Por la regla de Barrow $\int_\gamma h'(z)\, dz = 0$, ya que la curva γ es cerrada y la función h es holomorfa. Luego, deducimos que
$$0 = \int_\gamma h'(z)\, dz = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz - \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 0$$
de donde
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz \quad (1)$$
Aplicando el principio del argumento, el primer miembro de la igualdad (1) es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de f en la región R (contados con su multiplicidad). Análogamente, el segundo miembro de la igualdad (1) es igual a la cantidad de ceros menos la cantidad de polos de g en la región R (contados con su multiplicidad). Por lo tanto, queda demostrada la tesis.

2. Dado un polinomio $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_1 z + a_0$ de grado n, es decir, $a_n \neq 0$, aplicamos el teorema de Rouché con $f(z) = P(z)$ y $g(z) = a_n z^n$. Acotemos $|f(z) - g(z)|$ sobre el el borde del disco $D(0, R)$:

$$\begin{aligned} |f(z) - g(z)| = |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| &\leq |a_{n-1}|\,|z^{n-1}| + \ldots + |a_1|\,|z| + |a_0| \\ &= |a_{n-1}|\,R^{n-1} + \ldots + |a_1|\,R + |a_0| \\ &< |a_n|\,R^n\,, \end{aligned}$$

a partir de un $R_0 \geq 0$, pues

$$\frac{|a_{n-1}|\,R^{n-1} + \ldots + |a_1|\,R + |a_0|}{|a_n|\,R^n} \to 0 \text{ cuando } R \to +\infty.$$

De esta forma se prueba la desigualdad que es hipótesis del teorema de Rouché sobre el borde del disco de centro en el origen y radio R con R suficientemente grande. Aplicando el teorema de Rouché allí se tiene que $P(z)$ tiene n ceros (es obvio que g tiene n ceros en el origen).

3. Para mostrar esto hay que probar que el polinomio P tiene 6 raíces disco $D_2 = \{z : |z| < 2\}$ y ninguna en el disco $D_{1/2} = \{z : |z| < 1/2\}$.

   Para probar que todas las raíces están en D_2 utilizamos el teorema de Rouché de la primera parte con $f(z) = P(z)$ y $g(z) = z^6$.

   Para probar que ninguna de las raíces están en $D_{1/2}$ utilizamos el teorema de Rouché de la primera parte con $f(z) = P(z)$ y $g(z) = i$.

4. Para calcular las raíces en D_1 utilizamos el teorema de Rouché de la primera parte con $f(z) = P(z)$ y $g(z) = 3z^2$.

III. Resolver la siguiente ecuación diferencial utilizando la transformada de Lapace:

$$y'' - y' - 2y = \cos(3t)\,,$$

$$y(0) = 0\,,\quad y'(0) = 1\,.$$