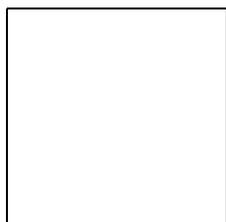


# Examen de Funciones de Variable Compleja.

19 de diciembre de 2009.



N. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

1. a) Sea  $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$  una función  $f = u + iv$ , y sea  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ .  
Demostrar que si  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$  y sus derivadas verifican

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

entonces  $f$  es derivable en  $z_0$ .

- b) Sea  $v : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$ , y sea  $f(x, y) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x) + x^2 - y^2 + 1 + iv(x, y)$ . Determinar la función real  $v(x, y)$  para que  $f$  sea una función compleja entera.
- c) Con la función  $f$  de la parte anterior calcular  $\int_{\mathcal{C}} f(z)/z^2 dz$ , donde  $\mathcal{C}$  es la circunferencia unitaria centrada en el origen.
2. a) Enunciar y demostrar el teorema del módulo máximo.
- b) Sean  $f(z)$  y  $g(z)$  funciones analíticas en una región  $\Omega \subset \mathbb{C}$  que contiene al disco cerrado  $D$  de centro en el origen y radio uno. Sabiendo que  $|f(z)| \leq 2|g(z)|$  para todo  $z \in \Omega$ , demostrar que existe una función  $F(z)$  analítica en  $\Omega$  tal que  $f(z) = F(z) \cdot g(z)$ .
- c) En las hipótesis de la parte anterior, si además se sabe que  $f(0) = 2g(0) \neq 0$ , demostrar que  $f(z) = 2g(z)$  para todo  $z \in \Omega$ .
3. a) Siendo  $\mathcal{L}(f)$  la transformada de Laplace de  $f$ , hallar una función primitiva  $f$  que cumple:

$$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{3p}{(p^2 - 4)(p^2 + 1)}.$$

- b) Utilizando el método de la transformada de Laplace resolver la siguiente ecuación:

$$y'' - 2y' + y - 2 \int_0^t y(u) du = 5, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$