# Examen de Funciones de Variable Compleja.

19 de diciembre de 2009.

| | | |
|---|---|---|
| | Apellido y nombre | Cédula de Identidad |
| N. examen | | |

1. a) Sea $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una función $f = u + iv$, y sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.
   Demostrar que si $f$ es diferenciable en $(x_0, y_0)$ y sus derivadas verifican

   $$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

   entonces $f$ es derivable en $z_0$.

   b) Sea $v : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$, y sea $f(x, y) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x) + x^2 - y^2 + 1 + iv(x, y)$. Determinar la función real $v(x, y)$ para que $f$ sea una función compleja entera.

   c) Con la función $f$ de la parte anterior calcular $\int_{\mathcal{C}} f(z)/z^2 \, dz$, donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia unitaria centrada en el origen.

2. a) Enunciar y demostrar el teorema del módulo máximo.

   b) Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones analíticas en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contiene al disco cerrado $D$ de centro en el origen y radio uno. Sabiendo que $|f(z)| \leq 2|g(z)|$ para todo $z \in \Omega$, demostrar que existe una función $F(z)$ analítica en $\Omega$ tal que $f(z) = F(z) \cdot g(z)$.

   c) En las hipótesis de la parte anterior, si además se sabe que $f(0) = 2g(0) \neq 0$, demostrar que $f(z) = 2g(z)$ para todo $z \in \Omega$.

3. a) Siendo $\mathcal{L}(f)$ la transformada de Laplace de $f$, hallar una función primitiva $f$ que cumple:

   $$\mathcal{L}(f)(p) = \frac{3p}{(p^2 - 4)(p^2 + 1)}.$$

   b) Utilizando el método de la transformada de Laplace resolver la siguiente ecuación:

   $$y'' - 2y' + y - 2\int_0^t y(u)\, du = 5, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$