Soluciones del Examen de Funciones de Variable Compleja.

19 de diciembre de 2009.

1. a) Sea $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ una función $f = u + iv$, y sea $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$. Demostrar que si f es diferenciable en (x_0, y_0) y sus derivadas verifican $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$, entonces f es derivable en z_0. Solución: Ver libro de Funciones de Variable Compleja en http://imerl.fing.edu.uy/varcompleja/2006/notas/Cauchy2.pdf, Teorema 2.1.6 Ecuaciones de Cauchy -Riemann. Demostración en página 20.

b) Sea $v : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$, y sea $f(x, y) = e^{-y}(x \cos x - y \sin x) + x^2 - y^2 + 1 + iv(x, y)$. Determinar la función real $v(x, y)$ para que f sea una función compleja entera. Solución: $u(x, y) = e^{-y}(x \cos x - y \operatorname{sen} x) + x^2 - y^2 + 1 \Rightarrow u_x = e^{-y}(\cos x - x senx - y \cos x) + 2x = v_y$. Primitivando respecto de y: $v = e^{-y}(x \operatorname{sen} x + y \cos x) + 2xy + \alpha(x)$, donde $\alpha(x)$ no depende de y. Derivando esta función v obtenida, respecto de x, derivando u respecto de y, e igualando $v_x = -u_y$ se obtiene $\alpha'(x) = 0$, de donde α es constante. Como $v(0, 0) = 2$, porque $f(0) = 1 + 2i$, resulta $\alpha = 2$. Luego $v(x, y) = e^{-y}(x \operatorname{sen} x + y \cos x) + 2xy + 2$.

c) Con la función f de la parte anterior calcular $\int_{\mathcal{C}} f(z)/z^2 \, dz$, donde $\mathcal{C}$ es la circunferencia unitaria centrada en el origen. Solución: La función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ donde $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son las funciones de la parte anterior. Sustituyendo en ellas $x = Re(z) = (z + \overline{z})/2$, $y = Im(z) = (z - \overline{z})/2i$, se obtiene $f(z) = ze^{iz} + z^2 + (1 + 2i)$, de donde $f'(z) = e^{iz}(1 + iz) + 2z$, $f'(0) = 1$. Aplicando la fórmula del residuo: $\int_{\mathcal{C}} f(z)/z^2 \, dz = 2\pi i f'(0) = 2\pi i$.

2. a) Enunciar y demostrar el teorema del módulo máximo. Solución: Ver libro de Funciones de Variable Compleja en http://imerl.fing.edu.uy/varcompleja/2006/notas/Cauchy8.pdf, Teorema 8.1.2 Enunciado y demostración en página 77.

b) Sean $f(z)$ y $g(z)$ funciones analíticas en una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ que contiene al disco cerrado D de centro en el origen y radio uno. Sabiendo que $|f(z)| \leq 2|g(z)|$ (1) para todo $z \in \Omega$, demostrar que existe una función $F(z)$ analítica en Ω tal que $f(z) = F(z) \cdot g(z)$ (2). Solución: O bien $g(z) \equiv 0 \; \forall \, z \in \Omega$ (abierto y conexo), o bien los ceros de $g(z)$ son aislados. En el primer caso: (1) $\Rightarrow f(z) \equiv 0 \; \forall \, z \in \Omega \;\; \Rightarrow$ cualquier función analítica $F(z)$ cumple (2). En el segundo caso: cada cero z_0 de g pertenece a un entorno $V_{z_0} \subset \Omega$, tal que z_0 es el único cero de g en V_{z_0}. Para todo $z \in \Omega$ donde g no se anula, el cociente $F(z) = f(z)/g(z)$ es función analítica, (3). De (2): $|F(z)| \leq 2 \;\; \forall \; z \in V^*_{z_0} = V_{z_0} \setminus \{z_0\}$, para cualquier cero z_0 de g. Entonces $F(z)$ es acotada en $V^*_{z_0} \;\; \Rightarrow$ se extiende analíticamente a z_0. Conclusión: $F(z)$ también está definida y es analítica en todo $z \in V_{z_0}$, para todo cero z_0 de g, (4). Reuniendo (3) y (4), F es analítica para todo $z \in \Omega$.

c) En las hipótesis de la parte anterior, si además se sabe que $f(0) = 2g(0) \neq 0$, demostrar que $f(z) = 2g(z)$ para todo $z \in \Omega$. Solucion: De la parte anterior $F(z)$ analítica, $|F(z)| \leq 2$ para todo $z \in \Omega$. $F(0) = f(0)/g(0) = 2 \;\Rightarrow\; F$ tiene un máximo relativo en $0 \in \Omega$. Por el principio del módulo máximo $F(z)$ es constante en Ω y como $F(0) = 2$, entonces $F(z) = 2 \;\; \forall \; z \in \Omega, \;\; \Rightarrow \;\; f(z) = F(z)g(z) = 2g(z) \;\; \forall \, z \in \Omega$.

3. a) Siendo $\mathcal{L}(f)$ la transformada de Laplace de f, hallar una función primitiva f que cumple: $\mathcal{L}(f)(p) = F(p) = 3p/[(p^2 - 4)(p^2 + 1)]$. Solución: Descomponiendo en fracciones simples: $F(p) = 3p/[(p - 2)(p + 2)(p - i)(p + i)] = (3/10)[1/(p - 2) + 1/(p + 2) - 1/(p + i) - 1/(p - i)] \;\Rightarrow\; f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = (3/10)(e^{2t} + e^{-2t} - e^{it} - e^{-it}) = (3/10)(e^{2t} + e^{-2t} - 2 \cos t)$.

b) Utilizando el método de la transformada de Laplace resolver la siguiente ecuación:

$y'' - 2y' + y - 2 \int_0^t y(u) \, du = 5$, $y(0) = y'(0) = 0$. Solución: Siendo $F(p) = \mathcal{L}(y)$:

$p^2 F - 2pF + F - 2F/p = 5/p \;\Rightarrow\; F(p) = 5/[(p - 2)(p^2 + 1)] = [1/(p - 2)] - [(p + 2)/(p^2 + 1)] = [1/(p - 2)] - [p/(p^2 + 1)] - [2/(p^2 + 1)] = \mathcal{L}(e^{2t} - \cos t - 2 \operatorname{sen} t) \;\Rightarrow y(t) = e^{2t} - \cos t - 2 \operatorname{sen} t$.