Examen de Funciones de Variable Compleja.

28 de febrero de 2008.

Núm. examen

______________________ Apellido y nombre

______________________ Cédula de Identidad

Cuadro para uso docente. NO LLENAR.

1a	1b	1c	1d		2a	2b	2c		3a	3b	3c	3d	total

- El examen consta de 3 ejercicios para responder por desarrollo, con varias partes cada uno. Son 11 partes de ejercicios en total. Cada parte bien resuelta vale 10 puntos, pudiéndose alcanzar un máximo de 110 puntos. No hay puntajes negativos.
- El mínimo para aprobar es de 60 puntos.
- La duración del examen es de 4 horas, y durante el mismo no se puede utilizar material ni calculadora.

1. Sean dadas las funciones reales $u(x,y),\ v(x,y)$ diferenciables en $\mathbb{R}^2$.

   Se define $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, donde $x = Re(z),\ y = Im(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Sea
   $$g(z) = \overline{f(\overline{z}^{\,2} + 3i)}$$
   y sean $U(x,y) = Re(g(z)),\ \ V(x,y) = Im(g(z))$.

   a) Hallar $U(x,y)$ y $V(x,y)$.

   b) Probar que si $u(x,y),\ v(x,y)$ verifican las ecuaciones de Cauchy-Riemann entonces $U(x,y),\ V(x,y)$ también las verifican. Deducir que si f es holomorfa entonces g también lo es.

   c) Encontrar el desarrollo en serie de potencias de $g(z)$ centrado en 0 sabiendo que $f(z) = e^{iz}$. (Sugerencia: Recordar el desarrollo en serie de potencias de la función exponencial compleja.)

   d) Sea γ una curva cerrada que no pasa por el origen y tal que $Ind_\gamma(0) = 1$. Calcular
   $$\int_\gamma \frac{g(z)}{z^{21}}\, dz$$
   siendo g la función hallada en la parte c).

2. Sea $f(z) = 2e^{iz} - 2 - 2iz$

   a) Probar que existe una función entera $g(z)$ tal que $g(0) = -1, \;\; f(z) = z^2 g(z)$.

   b) Sea $g(z)$ como en la parte anterior. Sea

   $$\varphi(z) = ze^{(1/2)\log_{[0,2\pi)} g(z)}$$

   la función holomorfa en $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \; Re(g(z)) < 0\}$. Calcular $\varphi'(0)$.

   c) Sea φ la función de la parte anterior. Probar que $f(z) = (\varphi(z)\,)^2$ para todo $z \in \Omega$.

3. Sea $P(z)$ un polinomio de grado 101 con todos sus coeficientes reales, siendo 1 el coeficiente del término de grado 101. Se considera

   $$f(z) = \frac{P'(z)}{P(z) - i} - \frac{P'(z)}{P(z) + i}.$$

   a) Para $z = x$ en el eje real probar que

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2\pi i.$$

   Sugerencia: Usar el cambio de variables reales $u = P(x)$.

   b) Sea S el semiplano $Im(z) > 0$. Sea k la cantidad de raíces de $P(z) + i$ en S, y sea h la cantidad de raíces de $P(z) - i$ en S, contada cada una tantas veces como su multiplicidad. Probar que $h + k = 101$.

   Sugerencia: Probar y usar que $P(z_0) = i \Rightarrow P(\overline{z_0}) = -i$.

   c) Para cada $R > 0$ real, sea la semicircunferencia $S_R : z = Re^{it}, \;\; 0 \leq t \leq \pi$. Se considera la curva cerrada $\gamma = [-R, R] + S_r$ orientada en sentido antihorario. Probar que para todo R suficientemente grande

   $$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i(k - h),$$

   donde k y h son los números naturales de la parte b).

   d) Encontrar los valores de los naturales k y h de la parte b). (Sugerencia: En la parte anterior hacer $R \to +\infty$ para expresar la integral impropia de la parte a) en función de h, k.)