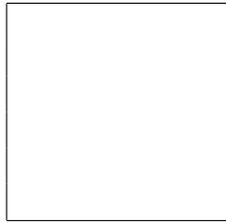


## Examen de Funciones de Variable Compleja.

21 de julio de 2007.



Núm. examen

\_\_\_\_\_

Apellido y nombre

\_\_\_\_\_

Cédula de Identidad

### Cuadro para uso docente. NO LLENAR.

1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	3e	total

- El examen consta de 3 ejercicios para responder por desarrollo, con varias partes cada uno. Son 13 partes de ejercicios en total. Cada parte bien resuelta vale 8 puntos, pudiéndose alcanzar un máximo de 104 puntos. No hay puntajes negativos.
- El mínimo para aprobar es de 60 puntos.
- La duración del examen es de 3 horas y media, y durante el mismo no se puede utilizar material ni calculadora.

1. Sea  $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$ .

Sean las funciones reales de variables reales  $u(x, y) = \operatorname{Re}(\cosh z)$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Im}(\cosh z)$  donde  $x = \operatorname{Re}(z)$ ,  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

a) Hallar  $u(x, y)$  y  $v(x, y)$ .

b) Hallar y dibujar en el plano complejo la imagen  $S_k$  por  $\cosh z$  de la recta  $\operatorname{Re}(z) = k > 0$ , donde  $k$  es una constante real positiva.

(Sugerencia: La ecuación  $u^2/a^2 + v^2/b^2 = 1$ , donde  $a > 0$  y  $b > 0$  son constantes, corresponde a la elipse con centro en el origen y semiejes paralelos a los ejes coordenados de longitudes  $a$  y  $b$  respectivamente.)

c) Encontrar una transformación de Moebius  $w = w(z)$  que lleve biyectivamente el disco  $|z - 2| < 1$  al semiplano  $\operatorname{Re}(w) > 0$ . (Nota: Existen infinitas posibles funciones  $w(z)$ ; elegir una sola.)

d) Sea  $f(z) = \cosh w(z)$ . Probar que  $f$  transforma holomórficamente el disco  $|z - 2| < 1$  en el abierto  $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ , que se obtiene de extraerle al plano complejo el segmento de recta con extremos en 1 y  $-1$ . (Nota: Podrá admitirse que la unión de las imágenes  $S_k$  obtenidas en la parte b) es el abierto  $\Omega$ .)

2. Sea  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) = 0 \text{ e } \operatorname{Im}(z) \leq 0\}$ .

Sea  $f \in H(\Omega)$  tal que  $f(z) = f(-z) \quad \forall z \in \Omega$  tal que  $\operatorname{Re}(z) \neq 0$ .

a) Probar que existe una extensión analítica de  $f$  a  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

b) Sea  $\mathcal{C}$  una circunferencia (cerrada) de centro en el origen. Probar que  $\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0$ .

c) Probar que si 0 es un polo de  $f$  entonces su orden es par.

d) Demostrar que para todo  $n$  entero y para toda curva cerrada  $\gamma$  que no pase por el origen se cumple:

$$\int_{\gamma} z^{2n} f(z) dz = 0.$$

3. Sea  $P(z) = z^{11} + z^7 + 1$ . Sea  $g(z) = z^{11} + 1$ . Para todo  $R > 0$  real se considera el arco de circunferencia  $S_R : z = Re^{it}, 0 \leq t \leq \pi/2$ , y la curva cerrada  $\gamma = [0, R] + S_R + [Ri, 0]$  orientada en sentido antihorario.

a) Probar que si  $R$  es suficientemente grande, entonces para todo  $z \in \gamma^*$  se cumple:

$$|P(z) - g(z)| \leq |P(z)| + |g(z)|$$

Sugerencias: Si  $z \in S_R$  probar que para  $R$  suficientemente grande  $R^7 < R^{11} - 1 \leq |g(z)|$ . Si  $z = x \in [0, R]$  usar que  $P(x) > 0$ ,  $P(x) - g(x) \geq 0$ ,  $g(x) > 0$ . Si  $z = ix \in [0, Ri]$  usar que  $x^7 < \sqrt{1 + (x^7 + x^{11})^2}$ .

b) Hallar la cantidad de raíces de  $P(z)$  en el primer cuadrante.

c) Para  $R$  suficientemente grande hallar el valor de la integral

$$\int_{\gamma} \frac{P'(z)}{P(z)} dz.$$

d) Probar que

$$\operatorname{Im} \int_{[Ri, 0] + [0, R]} \frac{P'(z)}{P(z)} dz = \int_0^R \frac{11x^{10} + 7x^6}{(x^7 + x^{11})^2 + 1} dx.$$

e) Calcular

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} \frac{P'(z)}{P(z)} dz$$

y deducir el valor de

$$\int_0^{+\infty} \frac{11x^{10} + 7x^6}{(x^7 + x^{11})^2 + 1} dx.$$