Examen de Funciones de Variable Compleja.

21 de julio de 2007.

Núm. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Cuadro para uso docente. NO LLENAR.

1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	3e	total

- El examen consta de 3 ejercicios para responder por desarrollo, con varias partes cada uno. Son 13 partes de ejercicios en total. Cada parte bien resuelta vale 8 puntos, pudiéndose alcanzar un máximo de 104 puntos. No hay puntajes negativos.
- El mínimo para aprobar es de 60 puntos.
- La duración del examen es de 3 horas y media, y durante el mismo no se puede utilizar material ni calculadora.

1. Sea $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$.

   Sean las funciones reales de variables reales $u(x,y) = Re(\cosh z)$, $v(x,y) = Im(\cosh z)$ donde $x = Re(z)$, $y = Im(z)$.

   a) Hallar $u(x,y)$ y $v(x,y)$.

   b) Hallar y dibujar en el plano complejo la imagen S_k por $\cosh z$ de la recta $Re(z) = k > 0$, donde k es una constante real positiva.
   (Sugerencia: La ecuación $u^2/a^2 + v^2/b^2 = 1$, donde $a > 0$ y $b > 0$ son constantes, corresponde a la elipse con centro en el origen y semiejes paralelos a los ejes coordenados de longitudes a y b respectivamente.)

   c) Encontrar una transformación de Moebius $w = w(z)$ que lleve biyectivamente el disco $|z-2| < 1$ al semiplano $Re(w) > 0$. (Nota: Existen infinitas posibles funciones $w(z)$; elegir una sola.)

   d) Sea $f(z) = \cosh w(z)$. Probar que f transforma holomórficamente el disco $|z-2| < 1$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, que se obtiene de extraerle al plano complejo el segmento de recta con extremos en 1 y -1. (Nota: Podrá admitirse que la unión de las imágenes S_k obtenidas en la parte b) es el abierto Ω.)

2. Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \,:\, Re(z) = 0 \text{ e } Im(z) \leq 0\}$.

   Sea $f \in H(\Omega)$ tal que $f(z) = f(-z) \;\; \forall\, z \in \Omega$ tal que $Re(z) \neq 0$.

   a) Probar que existe una extensión analítica de f a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   b) Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia (cerrada) de centro en el origen. Probar que $\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0$.

   c) Probar que si 0 es un polo de f entonces su orden es par.

   d) Demostrar que para todo n entero y para toda curva cerrada γ que no pase por el origen se cumple:

   $$\int_\gamma z^{2n} f(z)\, dz = 0.$$

3. Sea $P(z) = z^{11} + z^7 + 1$. Sea $g(z) = z^{11} + 1$. Para todo $R > 0$ real se considera el arco de circunferencia $S_R:\;\; z = Re^{it},\; 0 \leq t \leq \pi/2$, y la curva cerrada $\gamma = [0, R] + S_R + [Ri, 0]$ orientada en sentido antihorario.

   a) Probar que si R es suficientemente grande, entonces para todo $z \in \gamma^*$ se cumple:

   $$|P(z) - g(z)| \leq |P(z)| + |g(z)|$$

   Sugerencias: Si $z \in S_R$ probar que para R suficientemente grande $R^7 < R^{11} - 1 \leq |g(z)|$. Si $z = x \in [0, R]$ usar que $P(x) > 0,\; P(x) - g(x) \geq 0,\; g(x) > 0$. Si $z = ix \in [0, Ri]$ usar que $x^7 < \sqrt{1 + (x^7 + x^{11})^2}$.

   b) Hallar la cantidad de raíces de $P(z)$ en el primer cuadrante.

   c) Para R suficientemente grande hallar el valor de la integral

   $$\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz.$$

   d) Probar que

   $$Im \int_{[Ri,0]+[0,R]} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz = \int_0^R \frac{11x^{10} + 7x^6}{(x^7 + x^{11})^2 + 1}\, dx.$$

   e) Calcular

   $$\lim_{R \to +\infty} \int_{S_R} \frac{P'(z)}{P(z)}\, dz$$

   y deducir el valor de

   $$\int_0^{+\infty} \frac{11x^{10} + 7x^6}{(x^7 + x^{11})^2 + 1}\, dx.$$