Soluciones del Examen de Funciones de Variable Compleja.

21 de julio de 2007.

Ejercicio 1.
Sea $\cosh z = (e^z + e^{-z})/2$.
Sean las funciones reales de variables reales $u(x,y) = Re(\cosh z)$, $v(x,y) = Im(\cosh z)$ donde $x = Re(z)$, $y = Im(z)$.
Parte a) Hallar $u(x,y)$ y $v(x,y)$.
Solución:

$$\cosh(x+iy) = \frac{e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) + e^{-x}(\cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y))}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y + i \frac{e^x - e^{-x}}{2} \operatorname{sen} y \Rightarrow$$

$$u(x,y) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y, \quad v(x,y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \operatorname{sen} y.$$

Parte b) Hallar y dibujar en el plano complejo la imagen S_k por $\cosh z$ de la recta $Re(z) = k > 0$, donde k es una constante real positiva.
(Sugerencia: La ecuación $u^2/a^2 + v^2/b^2 = 1$, donde $a > 0$ y $b > 0$ son constantes, corresponde a la elipse con centro en el origen y semiejes paralelos a los ejes coordenados de longitudes a y b respectivamente.)
Solución: $x = k > 0 \Rightarrow \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^k+e^{-k}}{2} = a > 1$ constante, $\frac{e^x-e^{-x}}{2} = \frac{e^k-e^{-k}}{2} = b > 0$ constante.
$u = a \cos y$, $v = b \operatorname{sen} y$, y variable real $\Rightarrow$ $(u^2/a^2 + v^2/b^2) = 1$. La imagen S_k es una elipse centrada en el origen, con semiejes paralelos a los ejes coordenados, de longitudes $a > 1$ y $b > 0$.
Parte c) Encontrar una transformación de Moebius $w = w(z)$ que lleve biyectivamente el disco $|z-2| < 1$ al semiplano $Re(w) > 0$. (Nota: Existen infinitas posibles funciones $w(z)$; elegir una sola.)
Solución: Elijamos tres puntos de la circunferencia de centro en 2 y radio 1, ordenados de forma que se recorra en sentido horario (dejando el interior a la derecha) y hagámosle corresponder por una transformación de Moebius tres puntos de la recta $Re(w) = 0$ ordenados de forma que deje el semiplano $Re(w) > 0$ a la derecha. Por ejemplo: $w(1) = 0, w(2+i) = i, w(3) = \infty$.

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \quad w(1) = 0, w(3) = \infty, \quad \Rightarrow \quad w = \frac{a(z-1)}{z-3}$$

$$w(2+i) = i \quad \Rightarrow \quad i = \frac{a(1+i)}{i-1} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-1-i}{1+i} = -1, \quad \Rightarrow \quad w = \frac{1-z}{z-3}.$$

Parte d) Sea $f(z) = \cosh w(z)$. Probar que f transforma holomórficamente el disco $|z-2| < 1$ en el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, que se obtiene de extrarle al plano complejo el segmento de recta con extremos en 1 y -1. (Nota: Podrá admitirse que la unión de las imágenes S_k obtenidas en la parte b) es el abierto Ω.)
Solución: f es la composición de las funciones holomorfas $w(z)$ (holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{3\}$), y cosh holomorfa en todo el plano complejo. Luego f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{3\}$. El disco (abierto) $D = \{|z-2| < 1\}$ no contiene a $z = 3$, luego su imagen por f es imagen holomorfa. (A)

Siendo f la composición de $w(z)$ con $\cosh(w)$, la imagen por f del disco D es la imagen por $\cosh(w)$ de la imagen por $w(z)$ del disco D.(B)

1er. paso) La imagen por $w(z)$ del disco D es por construcción de la transformación de Moebius $w(z)$, el semiplano abierto $Re(w) > 0$. (C)

2do. paso) La imagen por $\cosh w$ del semiplano abierto $Re(w) > 0$, que es la unión de las rectas verticales $Re(w) = k > 0$, es la unión de las imágenes S_k por $\cosh w$ de esas rectas verticales. Según lo hallado en la parte b esas imágenes S_k son elipses, cuya unión (haciendo variar la constante $k > 0$) es el abierto $\Omega = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Luego, la imagen por $\cosh w$ del semiplano $Re(w) > 0$ es el abierto Ω. (D)

Reuniendo las afirmaciones (B), (C) y (D), se deduce que la imagen por f de D es el abierto Ω. En la afirmación (A) habíamos probado que la imagen es a través de una función holomorfa.

Ejercicio 2.

$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : Re(z) = 0 \text{ e } Im(z) \leq 0\}$. Sea $f \in H(\Omega)$ tal que $f(z) = f(-z)\ \ \forall z \in \Omega$ tal que $Re(z) \neq 0$.

Parte a) Probar que existe una extensión analítica de f a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Solución: Sea $\Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{Re(z) = 0,\ Im(z) \geq 0\}$. Entonces tenemos definidas las funciones $f(z) \in H(\Omega)$ y $f(-z) \in H(\Omega_1)$ que por hipótesis coinciden en $\Omega \cap \Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{Re(z) = 0\}$. Definamos:

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \Omega \\ f(-z) & \text{si } z \in \Omega_1 \end{cases}$$

g está bien definida para todo $z \in \Omega \cup \Omega_1$, porque en $\Omega \cap \Omega_1$ se cumple $f(z) = f(-z)$. Además g es holomorfa en $\Omega \cup \Omega_1$, porque coincide en cada punto de Ω con una función holomorfa $f(z)$ y en cada punto de Ω_1 con una función holomorfa $f(-z)$. Siendo $\Omega \cup \Omega_1 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ se tiene $g \in H(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Por construcción $g(z) = f(z)\ \forall z \in \Omega$, luego g es una extensión holomorfa de f al abierto $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Parte b) Sea $\mathcal{C}$ una circunferencia (cerrada) de centro en el origen. Probar que $\int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = 0$.

Solución: f es holomorfa en todo el plano complejo excepto el origen, por lo tanto es continua sobre la circunferencia $\mathcal{C}$, la integral I de f a lo largo de ella está bien definida, y es igual a la integral sobre la circunferencia quitando de ella dos puntos (los que corresponden a la intersección de la circunferencia $\mathcal{C}$ con el eje real.)

Sean las semicircunferencias: $S_1 = \mathcal{C} \cap \{Im(z) > 0\}$, $S_2 = \mathcal{C} \cap \{Im(z) < 0\}$. Se tiene: $I = \int_{\mathcal{C}} f(z)\, dz = \int_{S_1} f(z)\, dz + \int_{S_2} f(z)\, dz$.

A la última integral de la igualdad anterior, le hacemos el cambio de variable $w = -z$. Se tiene $dz = -dw$, $z \in S_2 \Leftrightarrow w \in S_1$, $f(z) = f(-z) = f(w)$, luego:

$$I = \int_{S_1} f(z)\, dz - \int_{S_1} f(w)\, dw = 0.$$

Parte c) Probar que si 0 es un polo de f entonces su orden es par.

Solución: Sea $k \geq 1$ el orden del polo en el origen. Hay que probar que k es par. Como k es el orden del polo $z = 0$, se cumple:

$$\lim_{z \to 0} z^k f(z) = \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

En el cálculo del límite anterior, hacemos el cambio $z = -w$. El límite cuando $z \to 0$ es el mismo que cuando $w = -z \to 0$, entonces:

$$0 \neq \lambda = \lim_{z \to 0} z^k f(z) = \lim_{w \to 0} (-1)^k w^k f(-w) = (-1)^k \lim_{w \to 0} w^k f(w) = (-1)^k \lambda$$

En la penúltima igualdad hemos usado que $f(w) = f(-w)$.

Concluimos que $0 \neq \lambda = (-1)^k \lambda \;\Rightarrow\; (-1)^k = 1 \;\Rightarrow\; k$ es par.

Parte d) Demostrar que para todo n entero y para toda curva cerrada γ que no pase por el origen se cumple:

$$\int_\gamma z^{2n} f(z)\, dz = 0.$$

Solución: Si $2n \geq k$, orden del polo $z = 0$ de f, entonces $\lim_{z\to 0} z^{2n} f(z) \in \mathbb{C}$, luego $z = 0$ es una singularidad evitable de $z^{2n} f(z)$. Concluimos que la función integrando tiene una extensión analítica a $z = 0$, por lo tanto el integrando $z^{2n} f(z)$ es holomorfo en todo el plano complejo, y la integral a lo largo de la curva cerrada γ es nula, por el teorema global de Cauchy.

Si $2n < k$, orden del polo $z = 0$, entonces por el teorema de los residuos:

$$\int_\gamma z^{2n} f(z) = 2\pi i \, Res_{z^{2n} f(z)}(0)\, Ind_\gamma(0).$$

Basta probar entonces que $Res_{z^{2n} f(z)}(0) = 0$.

Aplicando la fórmula integral del cálculo de residuo, tomemos una circunferencia $\mathcal{C}$ de centro en el origen, recorrida una sola vez en sentido antihorario. En forma similar a la solución de la parte b) llamemos $S_1 = \mathcal{C} \cap \{Im(z) > 0\}$, $S_2 = \mathcal{C} \cap \{Im(z) < 0\}$. Se tiene:

$$Res_{z^{2n} f(z)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} z^{2n} f(z)\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} z^{2n} f(z)\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{S_2} z^{2n} f(z)\, dz$$

En la última integral de la igualdad anterior, hacemos el cambio de variable $z = -w$. Resulta: $dz = -dw$, $z \in S_2 \Leftrightarrow w \in S_1$, de donde:

$$Res_{z^{2n} f(z)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} z^{2n} f(z)\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} (-w)^{2n} f(-w)\, dw =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} z^{2n} f(z)\, dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1} w^{2n} f(w)\, dw = 0.$$

Ejercicio 3.

Sea $P(z) = z^{11} + z^7 + 1$. Sea $g(z) = z^{11} + 1$. Para todo $R > 0$ real se considera el arco de circunferencia $S_R :\ z = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \pi/2$, y la curva cerrada $\gamma = [0, R] + S_R + [Ri, 0]$ orientada en sentido antihorario.

Parte a) Probar que si R es suficientemente grande, entonces para todo $z \in \gamma^*$ se cumple:

$$|P(z) - g(z)| \leq |P(z)| + |g(z)|$$

Sugerencias: Si $z \in S_R$ probar que para R suficientemente grande $R^7 < R^{11} - 1 \leq |g(z)|$. Si $z = x \in [0, R]$ usar que $P(x) > 0,\ P(x) - g(x) \geq 0,\ g(x) > 0$. Si $z = ix \in [0, Ri]$ usar que $x^7 < \sqrt{1 + (x^7 + x^{11})^2}$.

Solución: $|P(z) - g(z)| = |z^7| = |z|^7 \qquad (1)$.

1er. caso: $z \in S_R$, entonces $|z| = R$. Luego, usando (1): $|P(z) - g(z)| = R^7 < R^{11} - 1 \quad (2)$. La última desigualdad de (2) es cierta para R suficientemente grande porque:

$$\lim_{R\to+\infty} R^{11} - R^7 - 1 = +\infty, \text{ luego, para } R > k \text{ se cumple } R^{11} - R^7 - 1 > 0.$$

De (2) se tiene, cuando $|z| = R$:

$$|P(z) - g(z)| < R^{11} - 1 = (|z|^{11} - 1) = |z^{11}| - 1 =$$

$$= |z^{11} - 1 + 1| - 1 \leq |z^{11} + 1| + |-1| - 1 = |g(z)| \leq |g(z)| + |P(z)|.$$

Como uno de los signos de desigualdad es estricto, se deduce, para $z \in S_R$ y R suficientemente grande, que:

$$|P(z) - g(z)| < |g(z)| + |P(z)|.$$

2do. caso: $z = x,\ 0 \leq x \leq R$. Usando (1):
$|P(z) - g(z)| = x^7 = (x^{11} + x^7 + 1) - (x^{11} + 1) < x^{11} + x^7 + 1 \quad (3).$
La última desigualdad de (3) se obtiene porque el sustraendo $x^{11} + 1 \geq 1 > 0$, ya que x es real no negativo.

Se observa que $P(x) = x^{11} + x^7 + 1 > 0$ porque x es real no negativo.

Luego, en (3) se deduce, para $z = x \in R$:

$$|P(z) - g(z)| < x^{11} + x^7 + 1 = |P(z)| \leq |P(z)| + |g(z)|.$$

Como uno de los signos de desigualdad es estricto, se deduce, para $z \in [0, R]$, R real positivo, que:

$$|P(z) - g(z)| < |P(z)| + |g(z)|.$$

3er. caso: $z = ix,\ 0 \leq x \leq R$. Usando (1):
$|P(z) - g(z)| = |(ix)^7| = x^7 < \sqrt{1 + (x^7 + x^{11})^2} \quad (4).$
Por otro lado, para $z = ix, 0 \leq x$, se cumple:

$$P(z) = (ix)^{11} + (ix)^7 + 1 = -i(x^{11} + x^7) + 1, \ \ |P(z)| = \sqrt{1 + (x^7 + x^{11})^2}, \quad (5)$$

Reuniendo (4) con (5), se deduce, para $z = ix \in [0, Ri]$:

$$|P(z) - g(z)| < |P(z)| \leq |P(z)| + |g(z)|.$$

Parte b) Hallar la cantidad de raíces de $P(z)$ en el primer cuadrante.

Solución: Por la parte a) tenemos que para R suficientemente grande se cumple si $z \in \gamma$ entonces $|P(z) - g(z)| < |P(z)| + |g(z)|$. Por el teorema de Rouché, la cantidad de ceros de $P(z)$ encerrados por γ es igual a la cantidad de ceros de $g(z)$ encerrados por γ (ya que ni P ni g tienen polos porque son polinomios.)

Entonces, busquemos la cantidad de ceros de $g(z) = z^{11} + 1$ encerrados por γ, cuando R es suficientemente grande. La cantidad de ceros de $g(z)$ encerrados por γ es la cantidad de raíces 11-avas de -1 en el primer cuadrante. Las raíces 11-avas de -1 son, en coordenadas polares los 11 complejos que tienen módulo 1 y argumentos:

$$\pi/11,\ 3\pi/11,\ 5\pi/11,\ 7\pi/11,\ 9\pi/11,\ \pi,\ 13\pi/11,\ 15\pi/11,\ 17\pi/11,\ 19\pi/11,\ 21\pi/11$$

De ellos, los que están en el primer cuadrante son los que tienen argumento comprendido entre 0 y $\pi/2$, es decir los tres primeros, que tienen argumentos $\pi/11,\ 3\pi/11$, y $5\pi/11$.

Por lo tanto la cantidad de raíces de $P(z)$ en el primer cuadrante es 3.

Parte c) Para R suficientemente grande hallar el valor de la integral

$$\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz.$$

Solución: Por el principio del argumento, ya que $P(z)$ no tiene polos porque es un polinomio, se cumple:

$$\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = 2\pi i\ (\#\text{ceros de } P(z) \text{ encerrados por } \gamma)$$

Por lo visto en la parte anterior, para R suficientemente grande, se tiene:

$$\#\text{ceros de } P(z) \text{ encerrados por } \gamma = 3$$

Luego:

$$\int_\gamma \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = 6\pi i$$

Parte d) Probar que

$$Im \int_{[Ri,0]+[0,R]} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = \int_0^R \frac{11x^{10}+7x^6}{(x^7+x^{11})^2+1}\,dx.$$

Solución:

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{11z^{10}+7z^6}{z^{11}+z^7+1}$$

En el segmento $[Ri,0]$ se tiene $z = ix$ con x real tomando valores entre R y 0. En el segmento $[0,R]$ se tiene $z = x$ con x real tomando valores entre 0 y R. Con esas parametrizaciones, aplicando la definición de integral de una función compleja de variable compleja a lo largo de una curva, se obtiene:

$$\int_{[Ri,0]} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz = \int_R^0 \frac{11(ix)^{10}+7(ix)^6}{(ix)^{11}+(ix)^7+1}\,idx = i\int_0^R \frac{11x^{10}+7x^6}{-i(x^{11}+x^7)+1}\,dx =$$

$$= i\int_0^R \frac{11x^{10}+7x^6}{(x^7+x^{11})^2+1}\,dx - \int_0^R \frac{(11x^{10}+7x^6)(x^7+x^{11})}{(x^7+x^{11})^2+1}\,dx$$

En las primeras igualdades se usó que $i^{10} = i^6 = -1,\ i^{11} = i^7 = -i$. En la última igualdad se multiplicó numerador y denominador por el conjugado del denominador.

Luego:

$$Im\left(\int_{[Ri,0]} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz\right) = \int_0^R \frac{11x^{10}+7x^6}{(x^7+x^{11})^2+1}\,dx \quad (6)$$

Análogamente, en el intervalo real $[0,R]$, como la función integrando queda real, se deduce:

$$Im\left(\int_{[0,R]} \frac{P'(z)}{P(z)}\,dz\right) = 0 \quad (7)$$

Sumando (6) y (7), se deduce la igualdad de la tesis.

Parte e) Calcular

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R}\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz$$

y deducir el valor de

$$\int_0^{+\infty}\frac{11x^{10}+7x^6}{(x^7+x^{11})^2+1}\,dx.$$

Solución:

Por el lema de deformación de curvas, tenemos

$$\lim_{z\to\infty} z\,\frac{P'(z)}{P(z)}=\lim_{z\to\infty}\frac{z(11z^{10}+7z^6)}{z^{11}+z^7+1}=11=L$$

Siendo $S_R : z = Re^{it},\ 0\le t\le \pi/2$, se deduce:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R}\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz=iL(\pi/2-0)=11\pi\,i/2. \quad (8)$$

Por la parte c) tenemos que, para todo R suficientemente grande, se cumple:

$$\int_\gamma\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz=6\pi i$$

Además:

$$\int_\gamma\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz=\int_{S_R}\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz+\int_{[Ri,0]+[0,R]}\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz$$

Luego:

$$6\pi i=\int_{S_R}\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz+\int_{[Ri,0]+[0,R]}\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz$$

Tomando partes imaginarias y usando la parte d), se deduce:

$$6\pi=Im\left(\int_{S_R}\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz\right)+\int_0^R\frac{11x^{10}+7x^6}{(x^7+x^{11})^2+1}\,dx$$

Haciendo $R\to+\infty$ y usando la igualdad (8):

$$6\pi=Im\left(\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R}\frac{P'(z)}{P(z)}\,dz\right)+\lim_{R\to+\infty}\int_0^R\frac{11x^{10}+7x^6}{(x^7+x^{11})^2+1}\,dx=\frac{11}{2}\,\pi+\int_0^{+\infty}\frac{11x^{10}+7x^6}{(x^7+x^{11})^2+1}\,dx$$

De la igualdad anterior se deduce:

$$\int_0^{+\infty}\frac{11x^{10}+7x^6}{(x^7+x^{11})^2+1}\,dx=6\pi-\frac{11}{2}\,\pi=\frac{\pi}{2}\ .$$