Examen de Funciones de Variable Compleja.

1 de marzo de 2007.

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Núm. examen

Cuadro para uso docente. NO LLENAR.

1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c		3a	3b	3c	3d	total

- El examen consta de 3 ejercicios para responder por desarrollo, con varias partes cada uno. Son 11 partes de ejercicios en total. Cada parte bien resuelta vale 10 puntos, pudiéndose alcanzar un máximo de 110 puntos. No hay puntajes negativos.
- El mínimo para aprobar es de 60 puntos.
- La duración del examen es de 3 horas y media, y durante el mismo no se puede utilizar material ni calculadora.

1. Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que tiene en $3i$ y $-3i$ sus dos únicos polos complejos, y tal que
$$\lim_{z\to 0} \frac{f\left(1/z\right)}{z^4} = 1$$
   a) Probar que ∞ es una singularidad evitable de $z^4 f(z)$.
   b) Si además se sabe que los polos de f son ambos dobles, probar que
$$f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^2}.$$
   c) Calcular los residuos de f en $z = 3i$ y $z = -3i$.
   d) Calcular
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$
   (Sugerencia: Observar que $f(x)$ es una función par.)

2. Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ analítica para $|z| < 1$.
   Sea $j \geq 1$ natural. Se define $g_j(z) = f(z^j)$ para $|z| < 1$.

a) Probar que g_j es analítica para $|z| < 1$ y hallar el desarrollo de $g_j(z)$ en serie de potencias de z.

b) Para todo natural $m \geq 1$ probar que la derivada $m-$ésima de g_j en $z = 0$ es nula si m no es múltiplo de j y es igual a

$$g_j^{(m)}(0) = f^{(m/j)}(0)\frac{m!}{\left(\frac{m}{j}\right)!} \quad \text{si } m \text{ es múltiplo de } j$$

c) Sea $G(z) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(z)$.
Probar que para toda curva cerrada γ contenida en $\{|z| < 1\}$ se cumple $\int_\gamma G(z)\,dz = 0$, y que $G(z)$ es analítica en $\{|z| < 1\}$.
(Nota: Se podrá admitir que la serie que define $G(z)$ es uniformemente convergente en conjuntos compactos contenidos en $\{|z| < 1\}$.

3. Sea $D^* = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Sea $u : D^* \mapsto \mathbb{R}$ armónica.

Se definen

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \ \setminus \ \{z = x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \ \setminus \ \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

a) Demostrar que existen $f_1 \in H(\Omega_1)$ y $f_2 \in H(\Omega_2)$ tales que sus partes reales son iguales a $u(x, y)$, para todo z en Ω_1 y Ω_2 respectivamente, siendo x e y las partes real e imaginaria de z.

b) Probar que $f_1 - f_2$ es constante en cada componente conexa de $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

c) Demostrar que para todo real $x_0 > 0$ se cumple:

$$\lim_{Re(z)\to x_0,\ Im(z)\to 0^+} f_1(z) = f_2(x_0) + K_1 i$$

$$\lim_{Re(z)\to x_0,\ Im(z)\to 0^-} f_1(z) = f_2(x_0) + K_2 i$$

donde K_1 y K_2 son constantes reales independientes de x_0.

d) Sea γ_r la circunferencia de radio r $(0 < r < 1)$ recorrida una sola vez en sentido antihorario. Demostrar que

$$\int_{\gamma_r} f_1'(z)\,dz = (K_2 - K_1)i$$

donde K_2 y K_1 son las constantes reales de la parte c).
(Sugerencia: Considérese para $0 < \epsilon < 2\pi$ la integral de $f_1'(z)$, analítica en Ω_1, a lo largo del arco $\gamma_{r,\ \epsilon} : z = re^{it},\ \ \epsilon < t < 2\pi - \epsilon$, y tómese luego $\epsilon \to 0^+$.)