Soluciones del Examen de Funciones de Variable Compleja.

1 de marzo de 2007.

Ejercicio 1 a). Sea f una función meromorfa en $\mathbb{C}$ que tiene en $3i$ y $-3i$ sus dos únicos polos complejos, y tal que

$$\lim_{z\to 0} \frac{f(1/z)}{z^4} = 1 \in \mathbb{C}$$

Probar que ∞ es una singularidad evitable de $z^4 f(z)$.

Solución: Basta probar que $\lim_{z\to\infty} z^4 f(z)$ existe y es un número complejo. Haciendo el cambio de variable $w = 1/z$ se obtiene:

$$\lim_{z\to\infty} z^4 f(z) = \lim_{w\to 0} \frac{f(1/w)}{w^4} = 1.$$

Ejercicio 1 b). Si además se sabe que los polos de f son ambos dobles, probar que

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+9)^2}.$$

Solución: Sea

$$g(z) = (z^2+9)^2 f(z) \qquad (1)$$

Las singularidades g son solamente los dos polos de f, es decir: $z = 3i$, $z = -3i$. Como son polos dobles de f se cumple: $\lim_{z\to 3i}(z-3i)^2 f(z) \in \mathbb{C}$, $\lim_{z\to -3i}(z+3i)^2 f(z) \in \mathbb{C}$. Luego:

$$\lim_{z\to 3i} g(z) = \lim_{z\to 3i}(z^2+9)^2 f(z) = \lim_{z\to 3i}(z+3i)^2(z-3i)^2 f(z) = 6i \lim_{z\to 3i}(z-3i)^2 f(z) \in \mathbb{C}$$

Análogamente

$$\lim_{z\to -3i} g(z) = \lim_{z\to -3i}(z^2+9)^2 f(z) \in \mathbb{C}$$

Entonces $3i$ y $-3i$ son singularidades evitables de g. Por lo tanto g admite una extensión analítica a todo el plano complejo, que seguiremos llamando g.

Por otra parte $\lim_{z\to\infty} g(z) = \lim_{z\to\infty}(z^2+9)^2 f(z) = \lim_{z\to\infty}(z^2+9/z^4)\, z^4 f(z) = 1$

Luego g es acotada. Siendo g una función entera y acotada, aplicando el teorema de Liouville, g es constante. Siendo $\lim g(z) = 1$ se deduce $g(z) = 1 \;\forall\, z \in \mathbb{C}$.

Luego, despejando $f(z)$ de la igualdad (1) se deduce que $f(z) = 1/(z^2+9)^2$ como queríamos probar.

Ejercicio 1 c). Calcular los residuos de f en $z = 3i$ y $z = -3i$.

Solución: Usando la fórmula para cálculo de residuos en los polos dobles:

$$Res_{3i} f = \left((z-3i)^2 f(z)\right)'\Big|_{z=3i} = \left(\frac{(z-3i)^2}{(z^2+9)^2}\right)'\Bigg|_{z=3i} =$$

$$= \left(\frac{1}{(z+3i)^2}\right)'\Bigg|_{z=3i} = \frac{-2}{(z+3i)^3}\Bigg|_{z=3i} = \frac{-2i}{216} = \frac{-i}{108}.$$

$$Res_{-3i} f = \left((z+3i)^2 f(z)\right)'\Big|_{z=-3i} = \left(\frac{(z+3i)^2}{(z^2+9)^2}\right)'\Bigg|_{z=-3i} =$$

$$= \left(\frac{1}{(z-3i)^2}\right)'\Bigg|_{z=-3i} = \frac{-2}{(z-3i)^3}\Bigg|_{z=-3i} = \frac{2i}{216} = \frac{i}{108}.$$

Ejercicio 1 d). Calcular

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

(Sugerencia: Observar que $f(x)$ es una función par.)

Solución: Siendo $f(x)$ una función par, se tiene:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx$$

Consideremos la curva cerrada $\gamma_R = [-R, +R] + S_R$, donde $S_R : z = Re^{it},\ 0 \leq t \leq \pi$. Se cumple:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = \int_{-R}^{+R} f(x)\,dx + \int_{S_R} f(z)\,dz \qquad (2)$$

Por un lado, f es meromorfa y la curva γ_R es una curva cerrada tal que, si R es suficientemente grande, da una sola vuelta en sentido antihorario alrededor del polo $z = 3i$ de f. Luego, para todo R suficientemente grande, se tiene:

$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2\pi i\, Res_{3i} f = \frac{\pi}{54} \qquad (3)$$

Combinando (2) y (3) se deduce:

$$\int_{-R}^{+R} f(x)\,dx = \frac{\pi}{54} - \int_{S_R} f(z)\,dz$$

Luego, tomando límite cuando $R \to +\infty$ se deduce:

$$\int_{\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{54} - \lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)\,dz \qquad (4)$$

Aplicando el lema de deformación de caminos, siendo $\lim_{z\to\infty} zf(z) = \lim_{z\to\infty} z/(z^2+9)^2 = 0$, se deduce:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

Sustituyendo en (4):

$$\int_{\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{54}$$

de donde

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{108}.$$

Ejercicio 2 a). Sea $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ analítica para $|z| < 1$.

Sea $j \geq 1$ natural. Se define $\quad g_j(z) = f(z^j) \quad$ para $|z| < 1$. Probar que g_j es analítica para $|z| < 1$ y hallar el desarrollo de $g_j(z)$ en serie de potencias de z.

Solución: Sustituyendo z^j en vez de z en el desarrollo en serie de potencias de $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, z^n$ se tiene:

$$g_j(z) = f(z^j) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, z^{jn} = \sum_{m=1}^{\infty} b_m\, z^m \quad \forall\, z \in D = \{|z| < 1\} \qquad (1)$$

donde se hizo el cambio $m = nj$, y por lo tanto: $b_m = 0$ si m no es múltiplo de j y $b_m = a_{m/j} = a_n$ si m es múltiplo de j.

La serie a la derecha en la igualdad (1) es el desarrollo en serie de potencias de g_j en el disco abierto D; luego g_j es analítica en D.

Ejercicio 2 b). Para todo natural $m \geq 1$ probar que la derivada $m-$ésima de g_j en $z = 0$ es nula si m no es múltiplo de j y es igual a

$$g_j^{(m)}(0) = f^{(m/j)}(0) \frac{m!}{\left(\frac{m}{j}\right)!} \quad \text{si } m \text{ es múltiplo de } j$$

Solución: Usando la misma notación que en la parte anterior

$$b_m = \frac{g_j^{(m)}(0)}{m!}$$

donde $b_m = a_{(m/j)}$ si m es múltiplo de j y $b_m = 0$ si no lo es. Luego $g_j^{(m)}(0) = 0$ si m no es múltiplo de j, y si lo es, entonces:

$$g_j^{(m)}(0) = m!\, a_{(m/j)} \qquad (2)$$

Pero $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. Entonces, cuando $m = nj$ (es decir $n = m/j$), se cumple:

$$a_{(m/j)} = \frac{f^{(m/j)}(0)}{\left(\frac{m}{j}\right)!} \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2), se deduce que, cuando m es múltiplo de j, vale la siguiente igualdad:

$$g_j^{(m)}(0) = m!\, \frac{f^{(m/j)}(0)}{\left(\frac{m}{j}\right)!}$$

Ejercicio 2 c). Sea $G(z) = \sum_{j=1}^{\infty} g_j(z)$.

Probar que para toda curva cerrada γ contenida en $\{|z| < 1\}$ se cumple $\int_\gamma G(z)\, dz = 0$, y que $G(z)$ es analítica en $\{|z| < 1\}$.

(Nota: Se podrá admitir que la serie que define $G(z)$ es uniformemente convergente en conjuntos compactos contenidos en $\{|z| < 1\}$.

Solución:

$$\int_\gamma G(z)\, dz = \int_\gamma \sum_{j=1}^{\infty} g_j(z)\ dz$$

Como la convergencia de la serie es uniforme en el compacto $\gamma \subset D$, se puede intercambiar el orden de la integral con la sumatoria, y resulta:

$$\int_\gamma G(z)\, dz = \sum_{j=1}^{\infty} \int_\gamma g_j(z)\ dz \qquad (4)$$

Por la parte a) sabemos que para todo natural j la función g_j es analítica en el disco abierto D. Siendo γ una curva cerrada contenida en D y homotópica a un punto (porque D es simplemente conexo), aplicamos el teorema de Cauchy, y resulta:

$$\int_\gamma g_j(z)\ dz = 0 \quad \forall\, j \geq 1$$

Luego, sustituyendo en (4), resulta

$$\int_\gamma G(z)\, dz = 0$$

para toda curva cerrada γ contenida en D. Por el teorema de Morera, G es analítica en D.

Ejercicio 3 a). Sea $D^* = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$. Sea $u : D^* \mapsto \mathbb{R}$ armónica.
Se definen

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \ \setminus \ \{z = x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$$

$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \ \setminus \ \{z = x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

Demostrar que existen $f_1 \in H(\Omega_1)$ y $f_2 \in H(\Omega_2)$ tales que sus partes reales son iguales a $u(x,y)$, para todo z en Ω_1 y Ω_2 respectivamente, siendo x e y las partes real e imaginaria de z.

Solución: La función dada u es armónica en D^*. Tanto Ω_1 como Ω_2 son abiertos contenidos en D^*. Luego u es armónica en Ω_1 y también en Ω_2.

Los conjuntos Ω_1 y Ω_2 son simplemente conexos. Si u es armónica en un abierto Ω simplemente conexo, entonces existe f holomorfa en Ω cuya parte real es u. Se deduce entonces, que existen f_1 y f_2 holomorfas respectivamente en Ω_1 y en Ω_2, tales que sus partes reales coinciden con u.

Ejercicio 3 b). Probar que $f_1 - f_2$ es constante en cada componente conexa de $\Omega_1 \cap \Omega_2$.

Solución: Las funciones f_1 y f_2 están definidas ambas y son analíticas en $\Omega_1 \cap \Omega_2$, y por la parte a) sus partes reales son iguales a u. Entonces $f = f_1 - f_2$ es analítica en $A = \Omega_1 \cap \Omega_2$ y su parte real es idénticamente nula en A. Luego, f es constante (con parte real cero) en cada componente conexa de A.

Las componentes conexas de A son dos: los semiplanos $\{Im(z) > 0\}$ y $\{Im(z) < 0\}$. Se deduce entonces que existen constantes reales K_1 y K_2 tales que:

$$f_1(z) - f_2(z) = K_1 i \quad \forall z \in \{Im(z) > 0\}$$

$$f_1(z) - f_2(z) = K_2 i \quad \forall z \in \{Im(z) < 0\}$$

Ejercicio 3 c). Demostrar que para todo real $x_0 > 0$ se cumple:

$$\lim_{Re(z)\to x_0,\, Im(z)\to 0^+} f_1(z) = f_2(x_0) + K_1 i$$

$$\lim_{Re(z)\to x_0,\, Im(z)\to 0^-} f_1(z) = f_2(x_0) + K_2 i$$

donde K_1 y K_2 son constantes reales independientes de x_0.

Solución: Por la parte anterior:

$$f_1(z) = f_2(z) + K_1 i \quad \forall z \in \{Im(z) > 0\} \qquad (1)$$

$$f_1(z) = f_2(z) + K_2 i \quad \forall z \in \{Im(z) < 0\} \qquad (2)$$

Tomando límites en (1) y (2) cuando $z \to x_0$, es decir cuando $Re(z) \to x_0$ y $Im(z) \to 0$, se deduce:

$$\lim_{Re(z)\to x_0,\, Im(z)\to 0^+} f_1(z) = K_1 i + \lim_{Re(z)\to x_0,\, Im(z)\to 0^+} f_2(z) \qquad (3)$$

$$\lim_{Re(z)\to x_0,\, Im(z)\to 0^-} f_1(z) = K_2 i + \lim_{Re(z)\to x_0,\, Im(z)\to 0^-} f_2(z) \qquad (4)$$

Si el real $x_0 > 0$, entonces $x_0 \in \Omega_2$ donde f_2 es analítica, luego continua. Por lo tanto $\lim_{z\to x_0} f_2(z) = f_2(x_0)$. Sustituyendo en (3) y (4) se obtiene:

$$\lim_{Re(z)\to x_0,\, Im(z)\to 0^+} f_1(z) = K_1 i + f_2(x_0) \qquad (5)$$

$$\lim_{Re(z)\to x_0,\, Im(z)\to 0^-} f_1(z) = K_2 i + f_2(x_0) \qquad (6)$$

Ejercicio 3 d). Sea γ_r la circunferencia de radio r $(0 < r < 1)$ recorrida una sola vez en sentido antihorario. Demostrar que

$$\int_{\gamma_r} f_1'(z)\, dz = (K_2 - K_1)i$$

donde K_2 y K_1 son las constantes reales de la parte c).

(Sugerencia: Considérese para $0 < \epsilon < 2\pi$ la integral de $f_1'(z)$, analítica en Ω_1, a lo largo del arco $\gamma_{r,\ \epsilon} : z = re^{it},\ \ \epsilon < t < 2\pi - \epsilon$, y tómese luego $\epsilon \to 0^+$.)

Solución: Aplicando la regla de Barrow, porque $f_1'(z)$ es la derivada de la función f_1 analítica en Ω_1, y el arco abierto $\gamma_{r,\ \epsilon}$ está contenido en Ω_1, se obtiene:

$$\int_{\gamma_{r,\ \epsilon}} f_1'(z)\, dz = f_1(re^{i(2\pi-\ \epsilon)}) - f_1(re^{i\ \epsilon})$$

Haciendo tender ϵ a cero, se obtiene, de la igualdad anterior:

$$\int_{\gamma_r} f_1'(z)\, dz = \lim_{\epsilon\to 0+} f_1(re^{i(2\pi-\ \epsilon)}) - f_1(re^{i\ \epsilon}) =$$

$$= \lim_{Re(z)\to r,\ \ Im(z)\to 0^-} f_1(z) - \lim_{Re(z)\to r,\ \ Im(z)\to 0^+} f_1(z)$$

Usando el resultado de la parte anterior, se deduce:

$$\int_{\gamma_r} f_1'(z)\, dz = f_2(r) + K_2\, i - (f_2(r) + K_1\, i) = (K_2 - K_1)i.$$