Examen de Funciones de Variable Compleja. 17 de diciembre de 2007.

Núm. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Cuadro para uso docente. NO LLENAR.

1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	total

- El examen consta de 3 ejercicios para responder por desarrollo, con varias partes cada uno. Son 10 partes de ejercicios en total. Cada parte bien resuelta vale 10 puntos, pudiéndose alcanzar un máximo de 100 puntos. No hay puntajes negativos.
- El mínimo para aprobar es de 60 puntos.
- La duración del examen es de 3 horas y media, y durante el mismo no se puede utilizar material ni calculadora.

1. Sea γ el segmento de recta orientado con extremo inicial en el punto $1+2i$ y con extremo final en el punto i. Para todo $w \notin \gamma$ se considera la función analítica $G(w) = \displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-w}$.

   a) Probar que $G(1+i) = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-1-i}$
   donde $\mathcal{C}$ es el arco de circunferencia $\mathcal{C}: \; z = 1+i+e^{it}, \;\; \pi/2 \le t \le \pi$.

   b) Calcular $G(1+i)$ y la derivada n-ésima $G^{(n)}(1+i)$.

   c) Encontrar el desarrollo en serie de potencias de G centrado en $1+i$.

2. Sea f una función racional que tiene un cero simple en $4i$, un polo doble en $-2i$ y un polo triple en $1+i$, siendo estos los únicos ceros y polos de f.

   a) Probar que $\lim_{z\to\infty} z^4 f(z)$ es un complejo no nulo, y que $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$.

   b) Se sabe que $\lim_{z\to 1+i}(z-1-i)^3 f(z) = 10\,(1+3i)$. Calcular los residuos de f en $1+i$ y en $-2i$.

   c) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

3. Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función continua en el abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$.

   a) Probar que los puntos de Ω donde f no es derivable no pueden ser aislados.
   (Sugerencia: Asumir hipótesis de absurdo, y usar el teorema de Cauchy-Goursat.)

   b) Sea $g \in H(\Omega)$ una función que no tiene ceros. Probar que el conjunto de los puntos de Ω donde el producto gf es derivable, es el mismo conjunto donde f es derivable.

   c) Demostrar que no existe el límite cuando $z \to z_0$ del cociente incremental $\dfrac{\overline{z}-\overline{z_0}}{z-z_0}$ y deducir que $f(z) = \overline{z}$ no es derivable en ningún punto del plano complejo.
   (Sugerencia: Calcular el límite cuando $z - z_0$ es real, y cuando es imaginario puro.)

   d) Demostrar que $h(z) = |z|^2$ no es derivable en ningún punto diferente del origen.
   (Sugerencia: $|z|^2 = z\overline{z}$, usar partes b y c.)