Soluciones del Examen de Funciones de Variable Compleja.

(Completar)

18 de diciembre de 2007.

Ejercicio 1.

Sea γ el segmento de recta orientado con extremo inicial en el punto $1+2i$ y con extremo final en el punto i. Para todo $w \notin \gamma$ se considera la función analítica $G(w) = \int_\gamma \frac{dz}{z-w}$.

A) Probar que $G(1+i) = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{z-1-i}$

donde $\mathcal{C}$ es el arco de circunferencia $\mathcal{C}: \ z = 1+i+e^{it}, \ \ \pi/2 \le t \le \pi$.

B) Calcular $G(1+i)$ y la derivada n-ésima $G^{(n)}(1+i)$.

C) Encontrar el desarrollo en serie de potencias de G centrado en $1+i$.

Solución:

Parte A) El camino $\gamma - \mathcal{C}$ es cerrado, simple y como $1/z-1-i$ tiene un único polo en $1+i$ que no está en la región encerrada por ese camino cerrado, es una función analítica en esa región, y por el teorema de Cauchy la integral de esa función en ese camino cerrado es cero. Entonces:

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1-i}\, dz = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-1-i}\, dz$$

Por definición de la función $G(w)$ se cumple que la primera integral de la igualdad anterior es $G(1+i)$, luego:

$$G(1+i) = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-1-i}\, dz$$

Parte B) Calculando la integral de la parte a), parametrizando el arco de circunferencia $\mathcal{C}: z = 1+i++e^{it}, \quad \pi/2 \le t \le \pi$, resulta:

$$G(1+i) = \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-1-i)} = \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{ie^{it}\, dt}{e^{it}} = i\pi/2$$

Usando la fórmula integral de la derivada n-ésima:

$$G^{(n)}(1+i) = n! \int_{\mathcal{C}} \frac{dz}{(z-1-i)^{n+1}} = n! \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{ie^{it}\, dt}{e^{i(n+1)t}} = -(n-1)!\, (-in) \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-int}\, dt$$

$$G^{(n)}(1+i) = (n-1)! \left(e^{-in\pi/2} - e^{-in\pi} \right)$$

Se observa que:

$G^{(n)}(1+i) = 0$ si n es múltiplo de 4.

$G^{(n)}(1+i) = (n-1)!(1-i)$ si n es múltiplo de 4 más 1.

$G^{(n)}(1+i) = -2\,(n-1)!$ si n es múltiplo de 4 más 2.

$G^{(n)}(1+i) = (n-1)!(1+i)$ si n es múltiplo de 4 más 3.

Parte C) Usando que $G(1+i)i\pi/2$ y las últimas cuatro fórmulas obtenidas en la parte anterior, y observando que el desarrollo en serie de potencias de G en el punto $1+i$ es el siguiente:

$$G(w) = G(1+i) + \sum_{k=1}^{\infty} (z-1-i)^{4k} \left(\frac{G^{(4k)}(1+i)}{(4k)!} + \frac{G^{(4k+1)(1+i)}}{(4k+1)!}(z-1-i) + \right.$$

$$+\frac{G^{(4k+2)(1+i)}}{(4k+2)!}(z-1-i)^2 + +\frac{G^{(4k+3)(1+i)}}{(4k+3)!}(z-1-i)^3\Bigg)$$

se obtiene:

$$G(w) = \frac{i\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty}(z-1-i)^{4k}\left(\frac{(1-i)}{4k+1}(z-1-i)+\right.$$

$$\left. + \frac{-2}{(4k+2)}(z-1-i)^2 + \frac{(1+i)}{4k+3}(z-i-1)^3\right)$$

Ejercicio 2.

Sea f una función racional que tiene un cero simple en $4i$, un polo doble en $-2i$ y un polo triple en $1+i$, siendo estos los únicos ceros y polos de f.

A) Probar que $\lim_{z\to\infty} z^4 f(z)$ es un complejo no nulo, y que $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$.

B) Se sabe que $\lim_{z\to 1+i}(z-1-i)^3 f(z) = 10\,(1+3i)$. Calcular los residuos de f en $1+i$ y en $-2i$.

C) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Solución:

Parte A)

$$f(z) = \frac{a(z-4i)}{(z+2i)^2(z-1-i)^3}$$

donde a es una constante compleja no nula. Entonces:

$$\lim_{z\to\infty} z^5 f(z) = a, \quad \lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$$

Parte B) Multiplicando $f(z)$ por $(z-1-i)^3$, y tomando el límite cuando $z \to (1+i)$ queda

$$\frac{a(1+i-4i)}{(1+3i)^2} = 10\,(1+3i) \;\Rightarrow\; a(1-3i) = 10\,(1+3i)^3 \;\Rightarrow\; a\,10 \,= 10\,(1+3i)^4, \;\; a = (1+3i)^4.$$

$$Res_f(-2i) = \lim_{z\to -2i}\left(\frac{a(z-4i)}{(z-1-i)^3}\right)' = \left.\frac{a(-2z-1+11i)}{(z-1-i)^4}\right|_{z=-2i} = a\frac{15i-1}{(1+3i)^4} = 15i-1.$$

$$Res_f(1+i) = \lim_{z\to 1+i}\frac{1}{2}\left(\frac{a(z-4i)}{(z+2i)^2}\right)'' = \frac{a}{2}\left.\left(\frac{-z+10i}{(z+2i)^3}\right)'\right|_{z=1+i} = \left.\frac{a(z-16i)}{(z+2i)^4}\right|_{z=1+i} = \frac{a(1-15i)}{(1+3i)^4} = 1-15i.$$

Parte C) Considerando el camino cerrado $[-R,R]+\mathcal{C}_R$ siendo $\mathcal{C}_R : z = Re^{it}, \;\; 0 \le t \le \pi$, observamos que para $R > 2$ encierra únicamente al polo $1+i$ de la función $f(z)$. Entonces, por el teorema de los residuos:

$$\int_{[-R,R]} f(x)\,dx + \int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = 2\pi i\,Res_f(1+i) = 2\pi i(1-15i) = 2\pi(15+i) \qquad (1)$$

Haciendo $R \to \infty$, aplicamos el lema de deformación de curvas porque $\lim_{z\to\infty} zf(z) = 0$, obteniendo: $\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{C}_R} f(z)\,dz = 0$. Por lo tanto de (1) deducimos que:

$$\int_{\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi(15+i).$$

Ejercicio 3.

Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ una función continua en el abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$.

A) Probar que los puntos de Ω donde f no es derivable no pueden ser aislados.

(Sugerencia: Asumir hipótesis de absurdo, y usar el teorema de Cauchy-Goursat.)

B) Sea $g \in H(\Omega)$ una función que no tiene ceros. Probar que el conjunto de los puntos de Ω donde el producto gf es derivable, es el mismo conjunto donde f es derivable.

C) Demostrar que no existe el límite cuando $z \to z_0$ del cociente incremental $\dfrac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$ y deducir que $f(z) = \overline{z}$ no es derivable en ningún punto del plano complejo.

(Sugerencia: Calcular el límite cuando $z - z_0$ es real, y cuando es imaginario puro.)

D) Demostrar que $h(z) = |z|^2$ no es derivable en ningún punto diferente del origen.

(Sugerencia: $|z|^2 = z\overline{z}$, usar partes b y c.)

Solución:

Parte A) Por absurdo si en $z_0 \in \Omega$ la función f es continua pero no es derivable, pero es derivable para todo $z \in B^*_\epsilon(z_0)$, calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z_0) = 0$$

Aplicando el teorema de Cauchy-Goursat deducimos que $f(z)$ tiene una extensión analítica $g(z)$ en $B_\epsilon(z_0)$, incluido el punto z_0. Como esa extensión analítica es continua, y coincide con $f(z)$ para todo $z \neq z_0$, y como $f(z)$ también es continua, deducimos que:

$$g(z_0) = \lim_{z \to z_0} g(z) = \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Entonces f coincide con g en todos los puntos de $B_\epsilon(z_0)$, incluido z_0. Y como g es derivable en z_0 porque es analítica, entonces f también lo es, contradiciendo nuestra hipótesis de absurdo.

Parte B) Como g es analítica en Ω, y $z_0 \in \Omega$, entonces g es derivable en z_0. Como g no tiene ceros en Ω y el cociente de funciones analíticas cuando el denominador no se anula, es analítica, deducimos que $1/g$ es analítica en Ω, y por lo tanto $1/g$ también es derivable en z_0.

Si f es derivable en $z_0 \in \Omega$, como el producto de funciones derivables es derivable, se deduce que gf es derivable en z_0.

Recíprocamente, si gf es derivable en z_0, como el producto de funciones derivables es derivable, se deduce que $f = (gf) \cdot (1/g)$ es derivable en z_0.

Parte C) Cuando $z - z_0$ es real, $\overline{z} - \overline{z}_0 = \overline{z - z_0} = z - z_0$. Entonces:

$$\lim_{z - z_0 = a \to 0,\ a \in \mathbb{R}} \quad \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = 1$$

Por otro lado, cuando $z - z_0$ es imaginario puro, $\overline{z} - \overline{z}_0 = \overline{z - z_0} = -(z - z_0)$. Entonces:

$$\lim_{z - z_0 = ai \to 0,\ a \in \mathbb{R}} \quad \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0} = -1$$

Entonces el límite da diferente si uno se acerca por rectas horizontales o verticales a z_0. Concluimos que: $\lim_{z - z_0 \to 0} \frac{\overline{z} - \overline{z}_0}{z - z_0}$ no existe. Por lo tanto el cociente incremental de la función $\overline{z}$ no tiene límite, y por definición de derivabilidad, eso implica que $\overline{z}$ no es derivable en ningún punto z_0 del plano complejo.

Parte D) La función z es analítica y no se anula en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Además $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$. Aplicando lo probado en la parte B) la función continua $h(z) = |z|^2$ es derivable en los mismos puntos de Ω donde lo es $\overline{z}$. Aplicando la parte C), la función $\overline{z}$ no es derivable en ningún punto. Deducimos entonces que $h(z) = |z|^2$ no es derivable en ningún punto de Ω, es decir en ningún punto $z \neq 0$.