Examen de Funciones de Variable Compleja.

21 de Julio de 2006.

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

N. examen

Cuadro para uso docente. NO LLENAR.

1a	1b	1c	1	2a	2b	2c	2	3a	3b	3c	3	4a	4b	4c	4	Total

- El examen consta de 4 ejercicios para responder por desarrollo, con varias partes cada uno. Son 12 partes de ejercicios en total. Cada parte bien resuelta vale 9 puntos, pudiéndose alcanzar un máximo de 108 puntos. No hay puntajes negativos.
- El mínimo para aprobar es de 60 puntos.
- La duración del examen es de 4 horas, y durante el mismo no se puede utilizar material ni calculadora.

1. Sean $a \neq b$ dos complejos fijos no nulos, ambos con el mismo argumento igual a $\pi/4$, y tales que $|a| < |b|$.

   a) Encontrar la transformación de Moebius $w = w(z)$ tal que

   $$w(-i) = a, \;\; w(0) = (a+b)/2, \;\; w(i) = b$$

   b) Encontrar una transformación de Moebius h que lleve el el disco unitario $D = \{|z| < 1\}$ al semiplano $Re\, z < 0$. (Si hubiera más de una transformación posible elegir una sola).

   c) Hallar la imagen del disco D por la transformación f siguiente:

   $$f(z) = Log_{[0,2\pi)}\, w(h(z))$$

   donde w y h son las transformaciones de Moebius de las partes a) y b).

2. Sea $P(z) = z^9 + 3z^7 + 2^7$.

   a) Probar que si $z = 2e^{2k\pi i/7}$ para algún número entero k, entonces $|P(z)| > 0$.

   b) Probar que si $|z| = 2$, pero $z \neq 2e^{2k\pi i/7}$ para todo número entero k, entonces

   $$|3z^7 + 2^7| < 2^9$$

   c) Probar que todas las raíces complejas de $P(z)$ cumplen $|z| < 2$.

3. *a*) Hallar la transformada de Laplace $F(p)$ y su semiplano de convergencia de la función:

   $$f(t) = e^{(2+i)t} \quad \forall t \geq 0$$

   b) Hallar la transformada de Laplace $X(p)$ de la función $x(t)$ que cumple

   $$\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = e^{(2+i)t} \quad \forall t \geq 0$$

   $$x(0) = 0, \;\; \dot{x}(0) = 1$$

   c) Hallar la función $x(t)$ de la parte b).
   (Sugerencia: Podrá usarse sin probar la siguiente identidad de separación en fracciones simples:

   $$\frac{p+a}{(p-2-i)(p^2-3p+2)} = \frac{-(1+i)(2+i+a)/2}{p-2-i} + \frac{(1-i)(1+a)/2}{p-1} + \frac{(2+a)i}{p-2}$$

   válida para todo p complejo que no anule los denominadores, y para a complejo fijo cualquiera.)

4. Sea Ω un abierto conexo del plano complejo que contiene al 0. Sean f y g dos funciones no constantes y meromorfas en Ω tales que

   $$|f(z)| \leq |g(z)| \quad \forall\, z \in \Omega \;\text{ tal que } z \text{ no es polo de } f \text{ ni de } g.$$

   a) Probar que si $\alpha \in \Omega$ es un cero de g con orden p entonces α es un cero de f con orden $k \geq p$; y que si $\beta \in \Omega$ es un polo de f con orden m entonces β es un polo de g con orden $n \geq m$.

   b) Probar que las singularidades de f/g en Ω son aisladas y evitables.

   c) Probar que si $0 < |f(0)| = |g(0)| < +\infty$ entonces

   $$f(z) = cg(z) \quad \forall\, z \in \Omega \;\text{ tal que } z \text{ no es polo de } f \text{ ni de } g,$$

   donde c es una constante con $|c| = 1$.