Examen de Funciones de Variable Compleja.
Soluciones.

21 de julio de 2006.

Ejercicio 1. Sean $a \neq b$ dos complejos fijos no nulos, ambos con el mismo argumento igual a $\pi/4$, y tales que $|a| < |b|$.

Parte a): Encontrar la transformación de Moebius $w = w(z)$ tal que

$$w(-i) = a, \quad w(0) = (a+b)/2, \quad w(i) = b$$

Solución:
Una transformación de Moebius es en general de la forma

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Queremos que $w(-i) = a, \ \ , w(0) = (a+b)/2 \ w(i) = b$.

Entonces 0 no es el polo de la transformación. Por lo tanto $\delta \neq 0$. Podemos suponer que $\delta = 1$, ya que si se multiplican todos los coeficientes de una transformación de Moebius por una constante (en este caso $1/\delta$), se obtiene la misma transformación de Moebius.

$$w(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + 1} \quad \Rightarrow \quad w(0) = \beta = \frac{a+b}{2}$$

Ahora falta determinar α y γ. Sustituyendo por $z = -i, \ \ z = i$, se obtiene:

$$w(i) = \frac{\alpha i + (a+b)/2}{\gamma i + 1} = b, \quad w(-i) = \frac{-\alpha i + (a+b)/2}{-\gamma i + 1} = a$$

$$2\alpha i + a + b = 2b(\gamma i + 1), \quad -2\alpha i + a + b = 2a(-\gamma i + 1), \qquad (1)$$

Multiplicando la primera ecuación de (1) por a, la segunda por b, y sumando:

$$2(a-b)\alpha i + (a+b)^2 = 4ab, \ \Rightarrow \ 2(a-b)\alpha i = -(a-b)^2, \ \Rightarrow \ \alpha = \frac{(a-b)i}{2}$$

Luego, sustituyendo α en la primera ecuación de (1):

$$2b(\gamma i + 1) = -(a-b) + (a+b) = 2b, \ \Rightarrow \ \gamma i + 1 = 1, \ \rightarrow \ \gamma i = 0, \ \Rightarrow \ \gamma = 0$$

Por lo tanto, la transformación de Moebius buscada es:

$$w(z) = \frac{(a-b)i}{2} z + \frac{a+b}{2}$$

Parte b): Encontrar una transformación de Moebius h que lleve el el disco unitario $D = \{|z| < 1\}$ al semiplano $Re\, z < 0$. (Si hubiera más de una transformación posible elegir una sola).

Solución: En la circunferencia ∂D, elegimos tres puntos, por ejemplo $1, i, -1$. Al recorrer la circunferencia en el orden en que están dados esos tres puntos, el círculo interior D queda a la izquierda.

Como la transformación de Moebius $h(z)$ es conforme, el recorrer la imagen de ∂D (que queremos que sea el eje imaginario, borde del semiplano $\{Re(z) < 0\}$), en el orden dado por $h(1)$, $h(i)$, $h(-1)$, debe quedar el semiplano $\{Re(z) < 0\} = h(D)$ a la izquierda. Elegimos entonces como puntos imágenes de $z = 1, i, -1$, por ejemplo: $0, i, \infty$, respectivamente.

La transformación de Moebius $h(z)$ que cumple:

$$h(1) = 0, \quad h(i) = i, \quad h(-1) = \infty$$

lleva la circunferencia ∂D, que pasa por los puntos $1, i, -1$, a la recta $\{Re(z) = 0\}$ que pasa por los puntos $0, 1, \infty$; y lleva la región a la izquierda de ∂D, que es el círculo abierto D, a la región que queda a la izquierda de la recta $\{Re(z) = 0\}$, que es el semiplano abierto $\{Re(z) < 0\}$, como queremos.

$$h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Como $h(-1) = \infty$, el punto $z = -1$ es el polo de $h(z)$. Entonces el denominador es $\gamma(z+1)$, con $\gamma \neq 0$. Podemos suponer que $\gamma = 1$, ya que al multiplicar todos los coeficientes por $1/\gamma$, la transformación de Moebius es la misma. Queda:

$$h(z) = \frac{\alpha z + \beta}{z + 1}, \quad h(1) = 0, \quad h(i) = i$$

Sustituyendo $z = 1$ y haciendo que $h(1) = 0$, se obtiene:

$$\Rightarrow \quad \frac{\alpha + \beta}{2} = 0, \ \Rightarrow \quad \alpha = -\beta$$

Sustituyendo $z = i$, $\beta = -\alpha$ y haciendo que $h(i) = i$, se obtiene:

$$\frac{\alpha(i-1)}{i+1} = i, \quad \alpha = \frac{i^2 + i}{i - 1} = 1$$

Por lo tanto $\alpha = 1$, $\beta = -1$ y la transformación $h(z)$ buscada es:

$$h(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

Parte c): Hallar la imagen del disco D por la transformación f siguiente:

$$f(z) = Log_{[0,2\pi)} \ w(h(z))$$

donde w y h son las transformaciones de Moebius de las partes a) y b).

Solución: La transformación f es la composición de h con w con $Log_{[0,2\pi)}$.

Apliquemos al disco D sucesivamente esas tres transformaciones:

Al aplicar h, construida en la parte b), por construcción la imagen de D es el semiplano $\{Re(z) < 0\}$.

Al aplicar w, construida en la parte a), la imagen del semiplano $\{Re(z) < 0\}$ será una cierta región S que hallaremos.

En primer lugar, el borde del semiplano $\{Re(z) < 0\}$, que es el eje imaginario, tiene que ir a parar por $w = w(z)$, al borde de S. Hallemos entonces la imagen por $w(z)$ del eje imaginario:

Los puntos $-i, 0, i$ están en el eje imaginario. Y sus correspondientes por $w(z)$ son por construcción $a, (a+b)/2, b$. Luego la imagen del eje imaginario por $w(z)$ es la recta o circunferencia que pasa por los puntos $a, (a+b)/2, b$. Pero estos tres puntos están alineados (porque $(a+b)/2$ es el punto medio del segmento $\overline{ab}$). Luego, la imagen del eje imaginario por $w(z)$ es la recta que pasa por a y b.

Tenemos que el borde de S es la recta que pasa por a y b. Entonces S es uno de los dos semiplanos determinados por esta recta.

Al recorrer el eje imaginario de abajo hacia arriba, el semiplano $Re(z) < 0$ queda a la izquierda (al pasar de $-i$ a i, por ejemplo). Entonces, al recorrer la imagen por $w(z)$ del eje imaginario pasando de $w(-i) = a$, a $w(i) = b$, el semiplano S queda a la izquierda.

(Hacer un dibujo con los puntos a y b, ambos por hipótesis con argumento igual a $\pi/4$ y tales que $|a| < |b|$.)

Por lo tanto el semiplano S es el semiplano que queda a la izquierda de la recta recorrida desde a hacia b. (Es el semiplano de arriba e izquierda de la recta $y = x$.)

Ahora falta encontrar la imagen del semiplano S por la función $Log_{[0,2\pi)}$.

Busquemos primero la ecuación del semiplano S, en coordenadas polares (ya que su borde ∂S es una recta que pasa por el origen).

La recta ∂S es la que une a con b. Por hipótesis los dos puntos tienen argumento igual a $\pi/4$. Por lo tanto la semirrecta que pasa por el origen, y luego por a y por b, es la semirrecta $Arg_{[0,2\pi)}(z) = \pi/4$.

La semirrecta opuesta a ella es $Arg_{[0,2\pi)}(z) = \pi + \pi/4 = 5\pi/4$.

El semiplano S, arriba y a la izquierda de esa recta, resulta ser el de todos los complejos z que cumplen:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{4} < Arg_{[0,2\pi)}(z) < \frac{5\pi}{4} \right\}$$

Ahora apliquemos $Log_{[0,2\pi)}$ al semiplano S:

$$u = Log_{[0,2\pi)}(z) = L|z| + iArg_{[0,2\pi)}(z)$$

Como $|z| > 0$ cualquiera en S, entonces $Re(u) = L|z|$ es cualquier número real. Es decir:

$$Re(u) \in \mathbb{R} \quad \text{cualquiera} \quad (1)$$

Como $\frac{\pi}{4} < Arg_{[0,2\pi)}(z) < \frac{5\pi}{4}$ en S, entonces $Im(u) = Arg_{[0,2\pi)}(z)$ cumple

$$\frac{\pi}{4} < Im(u) < \frac{5\pi}{4} \qquad (2)$$

(1) y (2) son las ecuaciones de la imagen por la función $u = Log_{[0,2\pi)}(z)$ del semiplano S. Es por lo tanto la franja horizontal abierta, limitada por las rectas horizontales $y = \pi/4$ e $y = 5\pi/4$, formada por todos los complejos u que cumplen (1) y (2). Esta franja es la imagen por f del disco D.

Ejercicio 2. Sea $P(z) = z^9 + 3z^7 + 2^7$.

Parte a): Probar que si $z = 2e^{2k\pi i/7}$ para algún número entero k, entonces $|P(z)| > 0$.
Solución:
Por absurdo si $P(z) = 0$ para $z = 2e^{2k\pi i/7}$, entonces:

$$P(z) = \left(2e^{2k\pi i/7}\right)^9 + 3\left(2e^{2k\pi i/7}\right)^7 + 2^7 = 0$$

Siendo $\left(e^{2k\pi i/7}\right)^7 = 1$, se deduce:

$$P(z) = 2^9\left(e^{2k\pi i/7}\right)^2 + 4 \times 2^7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2^9\left(\left(e^{2k\pi i/7}\right)^2 + 1\right) = 0$$

Por lo tanto $w = e^{2k\pi i/7}$ verifica la ecuación $w^2 + 1 = 0$, y es por lo tanto raíz séptima de 1 y raíz cuadrada de -1 al mismo tiempo, lo que es absurdo. $\square$

Parte b): Probar que si $|z| = 2$, pero $z \neq 2e^{2k\pi i/7}$ para todo número entero k, entonces

$$|3z^7 + 2^7| < 2^9$$

Solución: Por la propiedad triangular del módulo: $|w + 2^7| \leq |w| + 2^7$ para todo w complejo. Pero además vale la desigualdad estricta $|w + 2^7| < |w| + 2^7$ si el triángulo con vértices en los puntos 0, 2^7 y $w + 2^7$ no degenera en el segmento con extremos 0 y $w + 2^7$ (hacer dibujo). Esto es porque cada lado de un triángulo que no degenera en un segmento es estrictamente menor que la suma de los otros dos.

En definitiva, vale la desigualdad estricta $|w + 2^7| < |w| + 2^7$ si w no es real positivo. En particular, usando $w = 3z^7$, si $3z^7$ no es real positivo, entonces vale la desigualdad estricta:

$$|3z^7 + 2^7| < |3z^7| + 2^7 = 3|z|^7 + 2^7 = 3 \times 2^7 + 2^7 = 4 \times 2^7 = 2^9$$

Basta demostrar entonces que $3z^7$ no es real positivo.

Por absurdo, si $3z^7$ fuera real positivo, entonces z^7 sería real positivo. Pero como $|z| = 2$, entonces z^7 es real positivo con módulo 2^7. Existe un único real positivo con módulo 2^7, que es el real 2^7. Se deduce que $z^7 = 2^7$, y por lo tanto z es raíz séptima compleja de 2^7. Por lo tanto $z = 2e^{2k\pi i/7}$ para algún entero k, y esto contradice la hipótesis de la parte b). $\square$

Parte c): Probar que todas las raíces complejas de $P(z)$ cumplen $|z| < 2$.

Solución: Aplicaremos el teorema de Rouché, usando $Q(z) = -z^9$ y probando que

$$|P(z) + Q(z)| < |P(z)| + |Q(z)| \quad \text{si } |z| = 2 \quad \text{(A probar)} \qquad (1)$$

En efecto, si probamos (1), entonces ningún cero de $P(z)$ se encuentra en la circunferencia $|z| = 2$. (Pues si algún cero z de $P(z)$ cumpliera $|z| = 2$, aplicando (1) quedaría $|Q(z)| < |Q(z)|$, lo que es absurdo.)

Por otro lado los ceros de $Q(z) = -z^9$, son $z = 0$ con multiplicidad 9. Entonces, ni los ceros de $P(z)$ ni los de $Q(z)$ se encuentran en la circunferencia $|z| = 2$.

Se puede entonces aplicar el teorema de Rouché, cuya tesis implica (considerando que P y Q son polinomios y por lo tanto no tienen polos) que:

Son iguales las cantidades de ceros de $P(z)$ y de $Q(z)$, contados con su multiplicidad, en el disco abierto $|z| < 2$.

Como $Q(z)$ tiene 9 ceros (contados con su multiplicidad), en $|z| < 2$, se deduce que $P(z)$ también. Siendo 9 el grado de $P(z)$, aplicando el teorema fundamental del Álgebra, resulta que $P(z)$ tiene en total 9 ceros en el plano complejo, contados con su multiplicidad. Deducimos que todos los ceros de $P(z)$ se encuentran en el disco abierto $|z| < 2$, como queríamos demostrar.

Ahora probemos (1):

$$|z| = 2 \;\Rightarrow\; |P(z) + Q(z)| = |3z^7 + 2^7| \leq 3|z|^7 + 2^7 = 3 \times 2^7 + 2^7 = 4 \times 2^7 = 2^9 = |Q(z)| \qquad (2)$$

Si $z = 2e^{2k\pi/7}$ para algún número entero k, entonces por la parte a) se cumple $P(z) > 0$. Por lo tanto, agregando el sumando $|P(z)| > 0$ al último miembro de la desigualdad (2), se deduce:

$$z = 2e^{2k\pi/7} \;\Rightarrow\; |P(z) + Q(z)| \leq |Q(z)| < |Q(z)| + |P(z)| \quad (3)$$

Si $|z| = 2$ pero $z \neq 2e^{2k\pi/7}$ para todo número entero k, entonces por la parte b) se cumple $|3z^7 + 2^7| < 2^9$. Por lo tanto, considerando esta desigualdad estricta entre el primer y el último miembro de la desigualdad (2), se deduce:

$$|z| = 2,\; z \neq 2e^{2k\pi/7} \;\Rightarrow\; |P(z) + Q(z)| = |3z^7 + 2^7| < 2^9 = |Q(z)| \leq |Q(z)| + |P(z)| \qquad (4)$$

Las desigualdades estrictas (3) y (4) demuestran (1) como queríamos. $\square$

Ejercicio 3.

Parte a): Hallar la transformada de Laplace $F(p)$ y su semiplano de convergencia de la función:

$$f(t) = e^{(2+i)t} \quad \forall t \geq 0$$

Solución:

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{(2+i)t} t e^{-pt}\, dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T e^{(2+i-p)t}\, dt =$$

$$F(p) = \lim_{T \to +\infty} \left. \frac{e^{(2+i-p)t}}{2+i-p} \right|_{t=0}^{t=T} = \lim_{T \to +\infty} \frac{e^{(2+i-p)T}}{2+i-p} - \frac{1}{2+i-p} =$$

$$F(p) = \frac{1}{p-2-i} + \lim_{T \to +\infty} \frac{e^{Re(2+i-p)T} e^{iIm(2+i-p)T}}{(2+i-p)} \quad (1)$$

Por un lado $e^{iIm(2+i-p)T}$ tiene módulo 1, por lo tanto no es cero y está acotado para todo T. Por otro lado el factor $e^{Re(2+i-p)T} = e^{(2-Rep)T}$ es real que, cuando $T \to +\infty$, tiende a infinito si $2 - Rep > 0$ y tiende a cero si $2 - Rep < 0$. Luego, de (1), se deduce que la integral no es convergente (tiende a infinito) si $2 - Rep > 0$, y es convergente a $1/(p-2-i)$ si $2 - Rep < 0$. El semiplano de convergencia es $2 - Rep < 0$, o lo que es lo mismo: $Rep > 2$. Luego:

$$F(p) = \frac{1}{p-2-i}, \quad \text{si } Re(p) > 2$$

Parte b): Hallar la transformada de Laplace $X(p)$ de la función $x(t)$ que cumple

$$\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = e^{(2+i)t} \quad \forall t \geq 0$$

$$x(0) = 0, \;\; \dot{x}(0) = 1$$

Solución: Llamemos $X(p)$, para $Re(p) > s_c$ a la transformada de Laplace de $x(t)$ en su semiplano de convergencia. Sabiendo que $x(0) = 0$, y que $\dot{x}(0) = 1$, podemos aplicar las fórmulas de transformadas de las derivadas:

$$\mathcal{L}(\dot{x}) = pX(p) - x(0) = pX(p), \quad \text{si } Re(p) > 0, \; Re(p) > s_c \quad (1)$$

$$\mathcal{L}(\ddot{x}) = p^2X(p) - px(0) - \dot{x}(0) = p^2X(p) - 1, \quad \text{si } Re(p) > 0, \; Re(p) > s_c \quad (2)$$

Transformando ambos miembros de la ecuación diferencial dada, las transformadas de Laplace son iguales en la intersección de sus semiplanos de convergencia. Se obtiene:

$$\mathcal{L}(\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t)) = \frac{1}{p-2-i}, \quad \text{si } Re(p) > s_c, Re(p) > 2$$

Sustituyendo (1) y (2):

$$p^2X(p) - 1 - 3pX(p) + 2X(p) = \frac{1}{p-2-i} \quad \text{si } Re(p) > s_c, Re(p) > 2$$

$$(p^2-3p+2)X(p)=\frac{p-1-i}{p-2-i};\quad \text{si } Re(p)>s_c, Re(p)>2$$

$$X(p)=\frac{p-1-i}{(p-2-i)(p-1)(p-2)};\quad \text{si } Re(p)>s_c, Re(p)>2$$

Esta transformada de Laplace es analítica en el semiplano $Re(p)>2$, semiplano lateral vertical derecho que no contiene ninguno de los polos. Por lo tanto, concluimos que

$$X(p)=\frac{p-1-i}{(p-2-i)(p-1)(p-2)};\quad \text{si } Re(p)>2$$

Parte c): Hallar la función $x(t)$ de la parte b).

(Sugerencia: Podrá usarse sin probar la siguiente identidad de separación en fracciones simples:

$$\frac{p+a}{(p-2-i)(p^2-3p+2)}=\frac{-(1+i)(2+i+a)/2}{p-2-i}+\frac{(1-i)(1+a)/2}{p-1}+\frac{(2+a)i}{p-2}$$

válida para todo p complejo que no anule los denominadores, y para a complejo fijo cualquiera.)

Solución: Descomponiendo en fracciones simples la transformada $X(p)$ hallada en la parte b), y usando la igualdad de la sugerencia con $a=-1-i$, se obtiene:

$$X(p)=\frac{p-1-i}{(p-2-i)(p-1)(p-2)}=\frac{-(1+i)/2}{p-2-i}+\frac{(1-i)(-i)/2}{p-1}+\frac{(1-i)i}{p-2}=$$

$$X(p)=\frac{-(1+i)/2}{p-2-i}+\frac{-(1+i)/2}{p-1}+\frac{(1+i)}{p-2}=(1+i)\left(-\frac{1/2}{p-2-i}-\frac{1/2}{p-1}+\frac{1}{p-2}\right)$$

Antitransformando $X(p)$, para lo cual usamos que la transformada de una suma es la suma de las transformadas, que la transformada del producto de una función por una constante es el producto de la transformada por esa constante, y que la transformada de $e^{at},\ t\geq 0$ es $1/(p-a),\ \ Re(p)>\Re(a)$, se deduce:

$$x(t)=(1+i)\left(-\frac{1}{2}\,e^{(2+i)t}-\frac{1}{2}\,e^{t}+e^{2t}\right)\quad \text{si } t\geq 0$$

Ejercicio 4. Sea Ω un abierto conexo del plano complejo que contiene al 0. Sean f y g dos funciones no constantes y meromorfas en Ω tales que

$$|f(z)| \leq |g(z)| \quad \forall\, z \in \Omega \ \text{ tal que } z \text{ no es polo de } f \text{ ni de } g.$$

Parte a): Probar que si $\alpha \in \Omega$ es un cero de g con orden p entonces α es un cero de f con orden $k \geq p$; y que si $\beta \in \Omega$ es un polo de f con orden m entonces β es un polo de g con orden $n \geq m$.

Solución: Si α es un cero de g, entonces $g(\alpha) = 0$. Como $|f(z)| \leq |g(z)|$ para todo $z \in \Omega$, entonces $|f(\alpha)| \leq |g(\alpha)| = 0$. Se deduce que α es un cero de f.

Como f y g son no constantes en Ω, sus ceros son aislados. Existe $p \geq 1$ orden del cero α de g. Entonces

$$g(z) = (z-\alpha)^p h(z), \quad h \in H(\Omega), \quad h(\alpha) \neq 0 \quad (1)$$

De la misma forma, existe $k \geq 1$ orden del cero α de f. Entonces

$$f(z) = (z-\alpha)^k u(z), \quad u \in H(\Omega), \quad u(\alpha) \neq 0 \quad (2)$$

Luego, usando la hipótesis:

$$|f(z)| \leq |g(z)| \quad \Rightarrow \quad |z-\alpha|^k |u(z)| \leq |z-\alpha|^p |h(z)| \quad \forall z \in \Omega$$

Dividiendo entre $|z-\alpha|^k$ para $z \neq \alpha$, se obtiene:

$$|u(z)| \leq |z-\alpha|^{p-k} ||h(z)| \ \ \forall z \in \Omega \setminus \{\alpha\} \quad (3)$$

Probemos que $k \geq p$. Por absurdo si $k < p$ entonces $|z-\alpha|^{p-k} \to 0$ cuando $z \to \alpha$, pues su exponente es positivo. Tomando límite en la desigualdad (3), cuando $z \to \alpha$ se obtiene:

$$\lim_{z\to\alpha} |u(z)| = \lim_{z\to\alpha} |z-\alpha|^{p-k} ||h(z)| = 0 \cdot h(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(\alpha) = 0$$

La igualdad anterior contradice de desigualdad $u(\alpha) \neq 0$ de (2). Hemos probado que si α es un cero de g con orden p entonces es un cero de f con orden $k \geq p$, como queríamos.

Ahora probemos que si β es un polo de f con orden m entonces β es un polo de g con orden $n \geq m$.

Si β es un polo de f entonces $\lim_{z\to\beta} f(z) = \infty$. Usando la hipótesis:

$$f(z) \leq g(z) \ \ \forall\, z \in \Omega \ \ \Rightarrow \lim_{z\to\beta} |f(z)| \leq \lim_{z\to\beta} |g(z)| \quad \Rightarrow \quad +\infty = \lim_{z\to\beta} |g(z)| \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to\beta} g(z) = \infty$$

Entonces β también es un polo de g.

Si el orden de β como polo de f es m entonces:

$$f(z) = \frac{v(z)}{(z-\beta)^m}, \quad v \in H(\Omega), \ \ v(\beta) \neq 0 \quad (4)$$

Análogamente, si el orden de β como polo de g es n entonces:

$$g(z) = \frac{w(z)}{(z-\beta)^n}, \quad w \in H(\Omega), \ \ w(\beta) \neq 0 \quad (5)$$

Usando la hipótesis:

$$|f(z)| \leq |g(z)| \quad \Rightarrow \quad \frac{|v(z)|}{|z-\beta|^m} \leq \frac{|w(z)|}{|z-\beta|^n} \quad \forall z \in \Omega \setminus \{\beta\}$$

Multiplicando por $|z-\beta|^m$ para $z \neq \beta$, se obtiene:

$$|v(z)| \leq |z-\beta|^{m-n}|w(z)| \;\; \forall z \in \Omega \setminus \{\beta\} \quad (6)$$

Probemos que $n \geq m$. Por absurdo si $n < m$ entonces $|z-\beta|^{m-n} \to 0$ cuando $z \to \beta$, pues su exponente es positivo.

Tomando límite en la desigualdad (6), cuando $z \to \beta$ se obtiene:

$$\lim_{z\to\beta} |v(z)| = \lim_{z\to\beta} |z-\beta|^{m-n} \cdot |w(z)| = 0 \cdot |w(\beta)| = 0 \quad \Rightarrow \quad |v(\beta)| = 0$$

La igualdad anterior contradice (4). Hemos probado que si β es un polo de f con orden m entonces es un polo de g con orden $n \geq m$, como queríamos. $\square$

Parte b): Probar que las singularidades de f/g en Ω son aisladas y evitables.

Solución: Las singularidades de f/g en Ω son los puntos donde f no es analítica (las singularidades de f), o donde g no es analítica (las singularidades de g), o donde ambas son analíticas pero se anula el denominador g (los ceros de g).

Como f y g son meromorfas en Ω, sus singularidades en Ω son polos. Entonces son aisladas.

Como g no es constante en Ω y es meromorfa, sus ceros en Ω son aislados.

Entonces las singularidades de f/g son todas aisladas.

Ahora probemos que son todas evitables.

Empecemos por considerar un punto $\gamma \in \Omega$ que sea polo de g y no de f. Entonces $\lim_{z\to\gamma} g(z) = \infty$, y $\lim_{z\to\gamma} f(z) = f(\gamma)$. Luego:

$$\lim_{z\to\gamma} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$$

porque el numerador tiende a un complejo y el denominador tiende a ∞.

Entonces la singularidad γ de f/g es evitable (y además es un cero de f/g).

Ahora consideremos un polo β de f, de orden m. Por la parte anterior, β también es polo de g con orden $n \geq m$. Luego:

$$\lim_{z\to\beta} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim \frac{(z-\beta)^n f(z)}{(z-\beta)^n g(z)} = \lambda \in \mathbb{C}$$

El límite λ es un complejo porque: el numerador $(z-\beta)^n f(z)$, cuando $z \to \beta$, tiende a un complejo (no nulo si n es igual al orden m del polo β de f; y nulo si $n > m$); y por otro lado el denominador $(z-\beta)^n g(z)$, cuando $z \to \beta$, tiende a un complejo no nulo (pues n es el orden del polo β de g).

Luego:

$$\lim_{z\to\beta} \frac{f(z)}{g(z)} = \lambda \in \mathbb{C}$$

Por lo tanto β es una singularidad evitable de f/g.

Finalmente consideremos un cero α de g, de orden p. Por la parte anterior, α también es cero de f con orden $k \geq p$. Luego:

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim \frac{f(z)/(z-\alpha)^p}{g(z)/(z-\alpha)^p} = \mu \in \mathbb{C}$$

El límite μ es un complejo porque: el numerador $f(z)/(z-\alpha)^p$, cuando $z \to \alpha$, tiende a un complejo (no nulo si p es igual al orden k del cero α de f; y nulo si $p < k$); y por otro lado el denominador $g(z)/(z-\alpha)^p$, cuando $z \to \alpha$, tiende a un complejo no nulo (pues p es el orden del cero α de g).

Luego:

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z)}{g(z)} = \mu \in \mathbb{C}$$

Por lo tanto α es una singularidad evitable de f/g. $\square$

Parte c): Probar que si $0 < |f(0)| = |g(0)| < +\infty$ entonces

$$f(z) = cg(z) \quad \forall\, z \in \Omega \text{ tal que } z \text{ no es polo de } f \text{ ni de } g,$$

donde c es una constante con $|c| = 1$.

Solución:

Por la parte b) la función $f(z)/g(z)$ es analítica en todo Ω excepto a lo sumo en una cantidad de singularidades aisladas y evitables. Por lo tanto tiene una extensión analítica a todo Ω. Seguiremos llamando f/g a esa extensión analítica. Tenemos $f/g \in H(\Omega)$.

Por hipótesis $|f(z)| \leq |g(z)|$ $\forall\, z \in \Omega$ tal que z no es polo de f ni de g. Luego, $|f/g| \leq 1$ para todo z que no es singularidad de f/g. Como la extensión analítica es continua, tomando límite cuando z tiende a una singularidad de f/g (que, por la parte b), debe ser evitable), se obtiene:

$$\left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq 1 \quad \forall z \in \Omega, \quad \frac{f}{g} \in H(\Omega) \qquad (7)$$

Pero por hipótesis

$$\left| \frac{f(0)}{g(0)} \right| = 1, \qquad 0 \in \Omega \quad (8)$$

De (7) y (8) se deduce que en $z = 0$ hay un máximo local del módulo de la función analítica f/g. Por el principio del módulo máximo esta función analítica f/g debe ser constante en el abierto conexo Ω. Deducimos:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = c \text{ constante} \quad \forall\, z \in \Omega \quad (9)$$

En particular para $z = 0$ se obtiene

$$|c| = \left| \frac{f(0)}{g(0)} \right| = 1 \quad (10)$$

De (9) y (10) se concluye que

$$f(z) = cg(z) \quad \forall z \in \Omega \setminus \{\text{polos de } f \text{ y de } g\}, \quad c \text{ constante tal que } |c| = 1. \quad \square$$