Examen de Funciones de Variable Compleja.

19 de diciembre de 2006.

N. examen

Apellido y nombre

Cédula de Identidad

Cuadro para uso docente. NO LLENAR.

1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3c	3d	total

- El examen consta de 3 ejercicios para responder por desarrollo, con varias partes cada uno. Son 12 partes de ejercicios en total. Cada parte bien resuelta vale 10 puntos, pudiéndose alcanzar un máximo de 120 puntos. No hay puntajes negativos.
- El mínimo para aprobar es de 60 puntos.
- La duración del examen es de 3 horas y media, y durante el mismo no se puede utilizar material ni calculadora.

1. Sea $u(x,y) = y/(x^2+y^2)$ definida para todo $(x,y) \in I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   a) Probar que u es armónica en $R^2 \setminus \{(0,0)\}$.

   b) Sea $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z = x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Hallar $f \in H(\Omega)$ tal que $Re(f(z)) = u(x,y)$, donde x e y son las partes real e imaginaria de z.

   c) Demostrar que $f(z)$ puede extenderse holomórficamente a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   d) Calcular $\int_\gamma f(z)\,dz$, donde γ es una curva cerrada que no pasa por el origen y tal que $Ind_\gamma(0) = 1$.

2. Sea $D_2(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$. Sea Ω una región tal que $\overline{D_2(0)} \subset \Omega$. Sea $f \in H(\Omega)$ tal que

$$f(0) = 1; \quad 4 < |f(z)| < 5 \text{ si } |z| = 2.$$

a) Probar que f tiene al menos un cero $\alpha \in D_2(0)$.
(Sugerencia: Asumir hipótesis de absurdo y usar el principio del módulo máximo para acotar superiormente $|1/f|$ en $\overline{D_2(0)}$.)

b) Probar que f no tiene ningún cero α tal que $|\alpha| \leq 1/3$.
(Sugerencia: Escribir $f(z) - f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y usar las desigualdades de Cauchy en $\overline{D_2(0)}$ para acotar $|a_n|$.)

c) Probar que existe una función $h \in H(\Omega)$ tal que

$$h(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{m}(z - \alpha_j)} \qquad \forall\, z \in \Omega \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m\}$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m$ son los ceros de f en $D_2(0)$ repetido cada uno tantas veces como su multiplicidad.

d) Sea h la función de la parte c). Probar que

$$|h(z)| > \frac{1}{4^{m-1}} \quad \text{si } z \in D_2(0), \qquad \text{y que} \quad \frac{1}{4^{m-1}} < |h(0)| < 5 \cdot 3^m.$$

3. Sea f una función meromorfa en el plano complejo, no idénticamente nula y tal que $zf(z+1) = (z+1)f(z)$ para todo z que no es polo de f.

a) Probar que:

$$\frac{1}{z} + \frac{f'(z+1)}{f(z+1)} = \frac{1}{z+1} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

para todo z que no es polo de f.

b) Probar que para todo entero n se cumple:

$$\frac{1}{z} + \frac{f'(z+n)}{f(z+n)} = \frac{1}{z+n} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

c) Sea $\mathcal{C}_n(\epsilon)$ la circunferencia de centro n y radio $\epsilon < 1$ que no pasa por ningún polo ni cero de f, recorrida en sentido antihorario una sola vez. Probar que para todo entero $n \neq 0$ se cumple:

$$2\pi i + \int_{\mathcal{C}_n(\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{\mathcal{C}_0(\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

(Sugerencia: Integrar la igualdad de la parte b) a lo largo de $\mathcal{C}_0(\epsilon)$.)

d) Probar que si 0 es polo de f con orden k entonces todo entero $n \neq 0$ es polo de f con orden $k + 1$.
(Sugerencia: Usar la igualdad de la parte c) y el principio del argumento.)