Soluciones del Examen de Funciones de Variable Compleja.

19 de diciembre de 2006.

Ejercicio 1 a). Sea $u(x,y) = y/(x^2+y^2)$ definida para todo $(x,y) \in I\!R^2 \setminus \{(0,0)\}$. Probar que u es armónica en $R^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Solución: $u_x = -2xy/(x^2+y^2)^2,\ \ u_y = (x^2-y^2)/(x^2+y^2)^2$
$u_{xx} = (6x^2y - 2y^3)/(x^2+y^2)^3, \quad u_{yy} = (2y^3 - 6x^2y)/(x^2+y^2)^3 \quad \Rightarrow$
$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Ejercicio 1 b). Sea $\Omega = \mathbb{C} \ \setminus \ \{z = x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Hallar $f \in H(\Omega)$ tal que $Re(f(z)) = u(x,y)$, donde x e y son las partes real e imaginaria de z.

Solución: Ω es simplemente conexo, y u es armónica en Ω. Luego existe $f \in H(\Omega)$ tal que $Re(f(z)) = u(x,y)$. Sea $v(x,y) = Im(f(z))$. Por Cauchy-Riemann $u_x = v_y, \quad v_y = -u_x$. Entonces $v_y = -2xy/(x^2+y^2)^2$. Primitivando respecto de y con x constante, resulta: $v(x,y) = \int (-2xy)/(x^2+y^2)^2\ dy = -x\int (2y)/(x^2+y^2)^2\ dy = -x\int du/u^2$, donde $u = x^2+y^2$. Luego $v(x,y) = xu^{-1} + A(x) = x/(x^2+y^2) + A(x)$.

Derivando $v(x,y)$ respecto de x resulta $v_x = -u_y = (y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2$. Luego
$\partial/\partial x \quad [x/(x^2+y^2) + A(x)] = (y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2 \quad \Rightarrow$
$(y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2 + A'(x) = (y^2-x^2)/(x^2+y^2)^2 \quad \Rightarrow$
$A(x) = k$, constante real. Se concluye

$$f(x+iy) = \frac{y}{x^2+y^2} + i\left(\frac{x}{x^2+y^2} + k\right)$$

Si se quiere expresar $f(z)$ en función de z complejo, sustituimos $x = (z+\overline{z})/2, \quad y = (z - overline z)/(2i)$ y resulta:
$f(z) = i/z$.

Ejercicio 1 c). Demostrar que $f(z)$ puede extenderse holomórficamente a $\mathbb{C} \setminus \ \{0\}$.

Solución: Las partes real e imaginaria de f son las funciones u y v halladas antes, que son de clase C^1 en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y por construcción verifican las condiciones de Cauchy- Riemann en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Luego f es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \ \{0\}$.

Otra forma: Sabiendo que $f(z) = i/z$ se deduce que f es analítica en $\mathbb{C} \setminus \ \{0\}$.

Ejercicio 1 d). Calcular $\int_\gamma f(z)\,dz$, donde γ es una curva cerrada que no pasa por el origen y tal que $Ind_\gamma(0) = 1$.
$f(z)$

Solución: La integral pedida es $2\pi i\, Res_f(0)$. El residuo se puede calcular como $1/(2\pi i)$ por la integral a lo largo de una circunferencia $\mathcal{C}$ de radio 1 centrada en el origen que dé una sola vuelta en sentido antihorario. Luego:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\mathcal{C}} u(x,y)\ dx - v(x,y)\ dy + i\ \int_{\mathcal{C}} u(x,y)\ dy + v(x,y)\ dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t)\ dt\ +\ i\ \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen} t \cos t - \cos t \operatorname{sen} t)\ dt = -2\pi.$$

Otra forma: Sabiendo que $f(z) = i/z$ se tiene:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{i}{z}\,dz = (2\pi i)\,i\,Ind_\gamma(0) = -2\pi.$$

Ejercicio 2 a). Sea $D_2(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$. Sea Ω una región tal que $\overline{D_2(0)} \subset \Omega$. Sea $f \in H(\Omega)$ tal que $f(0) = 1$; $\quad 4 < |f(z)| < 5$ si $|z| = 2$. Probar que f tiene al menos un cero $\alpha \in D_2(0)$. (Sugerencia: Asumir hipótesis de absurdo y usar el principio del módulo máximo para acotar superiormente $|1/f|$ en $\overline{D_2(0)}$.)

Solución: Por absurdo, si f no tuviera ningún cero en $D_2(0)$, como tampoco tiene ceros en $\partial D_2(0)$, no se anula en un abierto U que contiene a $\overline{D}_2(0)$. Luego $1/f$ es analítica en U. Por el principio del módulo máximo, aplicado a la función analítica $1/f$ se obtiene:

$$z \in D_2(0) \quad \Rightarrow \left| \frac{1}{f(z)} \right| \leq \max_{|z|=2} \left| \frac{1}{f(z)} \right| < 1/4 \qquad (1)$$

La última desigualdad se obtuvo porque $|f(z)| > 4$ si $|z| = 2$. Aplicando (2) a $z = 0 \in D_2(0)$ se obtiene $1 < 1/4$ lo que es absurdo.

Ejercicio 2 b). Probar que f no tiene ningún cero α tal que $|\alpha| \leq 1/3$. (Sugerencia: Escribir $f(z) - f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ y usar las desigualdades de Cauchy en $\overline{D_2(0)}$ para acotar $|a_n|$.)

Solución: El desarrollo de f en serie de potencias centradas en $z = 0$ es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ donde $a_0 = f(0) = 1$ y $a_n = (1/n!) f^{(n)}(0)$. Luego:

$$|f(z) - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||z|^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} |z|^n \qquad (2)$$

Aplicando las desigualdades de Cauchy en el disco $\overline{D_2(0)}$ se obtiene

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!\, M}{2^n}$$

donde M es el máximo de $|f(z)|$ cuando $|z| = 2$. Por hipótesis $M < 5$, luego:

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} < \frac{5}{2^n}$$

Sustituyendo en (2) y aplicándolo cuando $|z| \leq 1/3$ se deduce:

$$|z| \leq 1/3 \quad \Rightarrow \quad |f(z) - 1| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{6^n} = \frac{5/6}{1 - 1/6} = 1 \qquad (3)$$

Entonces para $|z| \leq 1/3$ no puede cumplirse $f(z) = 0$ pues si lo hiciera, de (3) se deduciría $|0 - 1| < 1$, lo que es absurdo.

Ejercicio 2 c). Probar que existe una función $h \in H(\Omega)$ tal que

$$h(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{m} (z - \alpha_j)} \qquad \forall\, z \in \Omega \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m\}$$

donde $\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m$ son los ceros de f en $D_2(0)$ repetido cada uno tantas veces como su multiplicidad.

Solución: En el abierto $U = \Omega \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_j, \ldots, \alpha_m\}$ la función h es analítica porque es el cociente de funciones analíticas con el denominador que no se anula. Basta demostrar que existe extensión de h analítica al punto α_j, para cada $j = 1, 2, \ldots, m$. Llamemos para fijar ideas α a ese punto, que es un cero de f con multiplicidad λ. Luego: $f(z) = (z-\alpha)^\lambda g(z)$ donde $g \in H(\Omega)$ tal que $g(\alpha) \neq 0$. Entonces:

$$h(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^m (z-\alpha_j)} = \frac{(z-\alpha)^\lambda g(z)}{(z-\alpha)^\lambda \ \prod_{\alpha_j \neq \alpha}(z-\alpha_j)} = \frac{g(z)}{\prod_{\alpha_j \neq \alpha}(z-\alpha_j)} \qquad (4)$$

Por lo tanto h es analítica en un entorno del punto α porque es el cociente de la función analítica g entre la función analítica $\prod_{\alpha_j \neq \alpha}(z-\alpha_j)$ que no se anula en α.

Ejercicio 2 d). Sea h la función de la parte c). Probar que

$$|h(z)| > \frac{1}{4^{m-1}} \quad \text{si } z \in D_2(0) \text{ y que } \frac{1}{4^{m-1}} < |h(0)| < 5 \cdot 3^m.$$

Solución: Como primer paso probemos que $h(z)$ no se anula en $\overline{D_2(0)}$. Por construcción:

$$h(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^m (z-\alpha_j)} \qquad (5)$$

Entonces los ceros de h son los ceros de f, y como $|f(z)| > 4$ si $|z| = 2$ se deduce que h no se anula en la frontera de $D_2(0)$. Por absurdo, si $h(\alpha) = 0$ para cierto $|\alpha| < 2$ entonces α es un cero de f en $D_2(0)$, y por lo tanto coincide con algún α_j del denominador en (5). En la igualdad (4) se obtuvo

$$h(z) = \frac{g(z)}{\prod_{\alpha_j \neq \alpha}(z-\alpha_j)}, \qquad g(\alpha) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad h(\alpha) \neq 0$$

La ultima desigualdad contradice la hipótesis $h(\alpha) = 0$, y hemos demostrado que h no se anula en $\overline{D_2(0)}$.

Por lo tanto $1/h$ es analítica en un abierto $U \supset \overline{D_2(0)}$ y podemos aplicar el principio del módulo máximo a $1/h$ en $\overline{D_2(0)}$:

$$z \in D_2(0) \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{h(z)}\right| \leq \max_{|z|=2}\left|\frac{1}{h(z)}\right| \leq \frac{\max \prod_{j=1}^m |z-\alpha_j|}{\min_{|z|=2}|f(z)|} < \frac{\prod_{j=1}^m 4}{4} = 4^{m-1}$$

$$z \in D_2(0) \quad \Rightarrow \quad |h(z)| > \frac{1}{4^{m-1}}$$

En particular para $z = 0$ se obtiene $|h(0)| > 1/4^{m-1}$. Sólo falta probar que $|h(0)| < 5 \cdot 3^m$. Tomando módulos en la igualdad (5):

$$|h(0)| = \frac{|f(0)|}{\prod_{j=1}^m |-\alpha_j|} < \frac{5}{(1/3)^m} = 5 \cdot 3^m.$$

En la última desigualdad hemos usado la parte b) en la que se probó que los ceros α_j de f en $D_2(0)$ cumplen $|\alpha_j| > 1/3$.

Ejercicio 3 a). Sea f una función meromorfa en el plano complejo, no idénticamente nula y tal que $zf(z+1) = (z+1)f(z)$ para todo z que no es polo de f. Probar que:

$$\frac{1}{z} + \frac{f'(z+1)}{f(z+1)} = \frac{1}{z+1} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

para todo z que no es polo de f.

Solución: Derivando la igualdad de la hipótesis se obtiene:

$f(z+1) + zf'(z+1) = f(z) + (z+1)f'(z)$. Dividiendo ambos miembros de esta igualdad entre $zf(z+1)$ o lo que es lo mismo entre $(z+1)f(z)$, resulta la igualdad de la tesis.

Ejercicio 3 b). Probar que para todo entero n se cumple:

$$\frac{1}{z} + \frac{f'(z+n)}{f(z+n)} = \frac{1}{z+n} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Solución: En la igualdad probada en la parte a) sustituimos z por $z+n$ y resulta:

$$\frac{1}{z+n} + \frac{f'(z+n+1)}{f(z+n+1)} = \frac{1}{z+n+1} + \frac{f'(z+n)}{f(z+n)}$$

$$\Rightarrow \quad \Theta(n+1) = \frac{f'(z+n+1)}{f(z+n+1)} - \frac{1}{z+n+1} = \frac{f'(z+n)}{f(z+n)} - \frac{1}{z+n} = \Theta(n)$$

La expresión $\Theta(n)$ depende del entero n pero vale lo mismo para un entero que para el siguiente. Entonces por inducción completa es igual a $\Theta(0)$ para todo natural positivo n. Para un entero negativo $-n$, con n natural, se cumple $\Theta(-n) = \Theta(-(n-1))$, luego por inducción completa es igual a $\Theta(0)$. Resulta entonces $\Theta(n) = \Theta(0)$ para todo entero n. Luego:

$$\frac{f'(z+n)}{f(z+n)} - \frac{1}{z+n} = \frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{1}{z}$$

Ejercicio 3 c). Sea $\mathcal{C}_n(\epsilon)$ la circunferencia de centro n y radio $\epsilon < 1$ que no pasa por ningún polo ni cero de f, recorrida en sentido antihorario una sola vez. Probar que para todo entero $n \neq 0$ se cumple:

$$2\pi i + \int_{\mathcal{C}_n(\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{\mathcal{C}_0(\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

(Sugerencia: Integrar la igualdad de la parte b) a lo largo de $\mathcal{C}_0(\epsilon)$.)

Solución:

$$\int_{\mathcal{C}_0(\epsilon)} \frac{1}{z}\, dz + \int_{\mathcal{C}_0(\epsilon)} \frac{f'(z+n)}{f(z+n)}\, dz = \int_{\mathcal{C}_0(\epsilon)} \frac{1}{z+n}\, dz + \int_{\mathcal{C}_0(\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

La integral de $1/(z+n)$ a lo largo de $\mathcal{C}_0$ es $2\pi i$ por el índice de $\mathcal{C}_0$ en $z = -n$. Cuando $n = 0$ este índice es 1, y cuando $n \neq 0$, siendo el radio $\epsilon < 1$, el índice es 0. Por lo tanto, para todo $n \neq 0$ se obtiene:

$$2\pi i + \int_{\mathcal{C}_0(\epsilon)} \frac{f'(z+n)}{f(z+n)}\, dz = \int_{\mathcal{C}_0(\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

Haciendo el cambio de variables $w = z+n$ en la integral del miembro de la izquierda de la igualdad anterior, se obtiene:

$$2\pi i + \int_{\mathcal{C}_{-n}(\epsilon)} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw = \int_{\mathcal{C}_0(\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

Como esta igualdad vale para todo entero no nulo n, sustituyendo n por $-n$ también es cierta.

Ejercicio 3 d). Probar que si 0 es polo de f con orden k entonces todo entero $n \neq 0$ es polo de f con orden $k+1$.

(Sugerencia: Usar la igualdad de la parte c) y el principio del argumento.)

Solución: Siendo f meromorfa no idénticamente nula, los polos y los ceros de f son aislados. Entonces, para el entero $n \neq 0$ existe $\epsilon > 0$ tal que las circunferencias $\mathcal{C}_n(\epsilon)$ y $\mathcal{C}_0(\epsilon)$ encierran un solo cero y ningún polo, o un solo polo y ningún cero, o ningún polo y ningún cero. Por el principio del argumento

$$\int_{\mathcal{C}_0(\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = -2k\pi i$$

donde $k \geq 1$ es el orden del 0 como polo de f. Luego, usando la igualdad de la parte c), se deduce:

$$\int_{\mathcal{C}_n(\epsilon)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = -2(k+1)\pi i$$

donde $k+1 \geq 2$. Usando el principio del argumento: $k+1$ es la cantidad de polos de f menos la cantidad de ceros de f, contado cada uno tantas veces como su multiplicidad, encerrados por la circunferencia $\mathcal{C}_n(\epsilon)$. Pero como en el interior del disco $D_\epsilon(n)$ solo puede haber a lo sumo un polo y ningún cero, o un cero y ningún polo, y como $k+1 > 0$, se deduce que hay un solo polo con multiplicidad $k+1$. Como lo anterior vale para todo radio $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño, resulta que $z = n$ es ese único polo de f en el disco $D_\epsilon(n)$.