# SOLUCIÓN SEGUNDO PARCIAL (2 DE JULIO DE 2018)

**Ejercicio 1.**

Parte i). Consideramos $F(z) = ze^{\alpha - z}$ y $G(z) = f(z) = ze^{\alpha - z} - 1$. Vamos a probar que $|F(z) - G(z)| < |F(z)|$ para todo $z \in \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. Entonces $|F(z) - G(z)| = |1| = 1$ y $|F(z)| = |ze^{\alpha - z}| = |z||e^{\alpha - z}| = |e^{\alpha - z}|$

Si $z = x + iy$, como $|z| = 1$ se tiene que $-1 \leq x \leq 1$, entonces $|e^{\alpha - z}| = e^{\alpha - x} > 1$ ya que $\alpha > 1$. Por lo tanto aplicando el Teorema de Rouché se tiene que el número de ceros de $F$ y $G = f$ son iguales. Como el número de ceros de $F$ $(z = 0)$ es uno entonces el número de ceros de $f$ es uno.

Parte ii). Un simple cálculo muestra que si $z_0$ es raíz de $f$ entonces $\overline{z_0}$ es raíz de $f$. Como por la parte i) hay una única raíz, entonces $z_0 = \overline{z_0}$. Lo que implica que $z_0$ es un número real.

**Ejercicio 2.** Parte 1). Para los $z \in \mathbb{C}$ tales que $z^n + a^n \neq 0$, $f$ es holomorfa ya que es cociente de funciones holomorfas. Si $z_0$ es tal que $z_0^n + a^n = 0$, entonces $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$. Lo que implica que $z_0$ es un polo.

Parte 2). Si consideramos $h(z) = z^n + a^n$ se tiene que $h^{'}(z) = nz^{n-1}$. Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h^{'}(z)}{h(z)} dz = \frac{1}{n} N_h,$$

donde $N_h$ es la cantidad de ceros de $h$ en el interior de $\gamma$. Como $N_h = 0$ si $R < |a|$ y $N_h = n$ si $R > |a|$, se concluye que

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & si \quad R < |a|, \\ \\ 2\pi i & si \quad R > |a|. \end{cases}$$

Parte 2).

**Ejercicio 3.** Ver notas de teórico.

**Ejercicio 4.** Ver notas de Eleonora Catsigeras capítulo 16, página 175.