Universidad de la República - Facultad de Ingeniería - IMERL.
Curso: Funciones de variable compleja.

SEGUNDO PARCIAL - 2 DE JULIO DE 2018. DURACIÓN: 3:30

No. Parcial	Apellido y nombre	Cédula	Firma

PARA USO DOCENTE				
Ej 1	Ej 2	Ej 3	Ej4	**Total**

Ejercicio 1. (14 puntos)

Sea α un número real, $\alpha > 1$ y la función

$$f(z) = ze^{\alpha - z} - 1$$

i) Probar que f tiene exactamente un cero en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.(9 puntos)
ii) Probar que el cero hallado en i) es un número real.(5 puntos)

Ejercicio 2.(14 puntos)
Sea $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ y f tal que

$$f(z) = \frac{z^{n-1}}{z^n + a^n}.$$

1. Probar que f es meromorfa en $\mathbb{C}$.(5 puntos)
2. Sea $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(t) = Re^{it}$ con $R \neq |a|$. Probar que

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & si \quad R < |a|, \\ 2\pi i & si \quad R > |a|. \end{cases} \qquad (\text{ 9 puntos})$$

Ejercicio 3.(20 puntos)

(a) Sean γ_0 y γ_1 caminos cerrados definidos en $[0, 1]$ tales que para un $\alpha \in C$ dado se cumple: $|\gamma_1(s) - \gamma_0(s)| < |\alpha - \gamma_0(s)|$ $\forall s \in [0, 1]$ entonces

$$\text{Ind}_{\gamma_0}(\alpha) = \text{Ind}_{\gamma_1}(\alpha).(10 \text{ puntos})$$

(b) Probar el siguiente resultado (Teorema de Rouché):
Sea γ un camino cerrado en un abierto conexo Ω, tal que $\text{Ind}_\gamma(a) = 0$, $\forall a \notin \Omega$. Supongamos que $\text{Ind}_\gamma(a)$ solo puede tomar valores 0 y 1 y sea $\Omega_1 = \{a \in \Omega : \text{Ind}_\gamma(a) = 1\}$. Sea $f \in H(\Omega)$, f no nula, y N_f el número de ceros de f en Ω_1 contando su multiplicidades.
Si $g \in H(\Omega)$ y $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, $\forall z \in \gamma^*$ entonces $N_f = N_g$.(10 puntos)

Ejercicio 4. (12 puntos)
Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$. Calcular

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1}$$