Solución 2do Parcial de Funciones de Variable Compleja

3 de julio de 2017

Ejercicio 1

i. Sea $f_1(z) = \dfrac{(z^2-\pi^2)^2}{z(\cos z - 1)^2}$.

f_1 tiene un cero de orden 2 en π y otro en $-\pi$ ya que $(z^2-\pi^2)^2 = (z-\pi)^2(z+\pi)^2$.

Por otro lado, $\cos z - 1$ se anula siempre que $z = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. En un entorno de $z = 2k\pi$, el desarrollo en serie de potencias de $\cos z - 1$ es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2k\pi)^{2n}}{n!} = (z-2k\pi)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2k\pi)^{2n-2}}{n!}$. Definiendo, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $g_k(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-2k\pi)^{2n-2}}{n!}$, se tiene que $(\cos z - 1)^2 = (z-2k\pi)^4 g_k(z)^2$ donde g_k es holomorfa, y $g_k(2k\pi) \neq 0$. Luego, f_1 tiene un polo de orden 5 en 0, y de orden 4 en $2k\pi$, $\forall k \neq 0$.

ii. Sea $f_2(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z}} - 1}{z(z^2-1)}$. Los ceros de f_2 se dan cuando $e^{\frac{1}{z}} = 1$, es decir, $z = \frac{1}{2k\pi i}$ con $k \in \mathbb{Z}$ y $k \neq 0$. Estos ceros son de orden 1, ya que:

$$\lim_{z \to \frac{1}{2k\pi i}} \frac{e^{\frac{1}{z}} - 1}{z(z^2-1)\left(z - \frac{1}{2k\pi i}\right)} = \frac{32k^5\pi^5}{i(1+4k^2\pi^2)} \neq 0$$

Por otro lado, es claro que f_2 tiene un polo simple en $z = 1$ y otro en $z = -1$ ya que $\lim_{z\to 1} |f(z)| = \infty$, $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \dfrac{e-1}{2}$. Probarlo para $z = -1$ es análogo.

Veamos ahora que $z = 0$ es una singularidad esencial.

Tomando $x \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lim_{x\to 0^+} f_2(x) = +\infty$. Por otro lado, si consideramos la sucesión $z_n = \frac{1}{2n\pi i}$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, y $\lim_{n\to\infty} f_2(z_n) = 0$ ya que $f_2(z_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, $\nexists \lim_{z\to 0} f_2(z)$. Además, f_2 no está acotada en ningún entorno de 0, de donde concluimos que tiene una singularidad esencial en $z = 0$.

Ejercicio 2

(a) Observemos primero que $\cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 2\left(\dfrac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{2}e^{2it} + \frac{1}{2}e^{-2it}$. Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^R \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{1+t^4} dt &= \frac{1}{2}\int_0^R \frac{e^{2it}}{1+t^4} dt + \frac{1}{2}\int_0^R \frac{e^{-2it}}{1+t^4} dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-R}^R \frac{e^{2iz}}{1+z^4} dz\end{aligned}$$

donde la última igualdad sale de hacer el cambio de variable $z = -t$ en el segundo sumando.

Consideremos la curva $\gamma_R = [-R; R] \cup S_R$ orientada en sentido antihorario, donde S_R es el arco de circunferencia de radio R, que une los puntos R y $-R$ en el semiplano positivo.

La función $f(z) = \dfrac{e^{2iz}}{1+z^4}$ tiene cuatro polos simples ($e^{\frac{i\pi}{4}}$, $e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $e^{\frac{5\pi i}{4}}$, $e^{\frac{7\pi i}{4}}$), siendo holomorfa en el complemento de los mismos.

Luego, por el teorema de los residuos, se tiene que $\displaystyle\int_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i\left(Res(f, e^{\frac{i\pi}{4}}) + Res(f, e^{\frac{3i\pi}{4}})\right)$ puesto que $Ind_{\gamma_R}(e^{\frac{i\pi}{4}}) = Ind_{\gamma_R}(e^{\frac{3i\pi}{4}}) = 1$ y $Ind_{\gamma_R}(e^{\frac{5i\pi}{4}}) = Ind_{\gamma_R}(e^{\frac{7i\pi}{4}}) = 0$.

Operando, obtenemos:

$$Res(f, e^{\frac{i\pi}{4}}) = \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{4}}} (z - e^{\frac{i\pi}{4}})f(z) = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}} e^{\sqrt{2}(-1+i)}$$
$$Res(f, e^{\frac{3i\pi}{4}}) = \lim_{z\to e^{\frac{3i\pi}{4}}} (z - e^{\frac{3i\pi}{4}})f(z) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}(1+i)}$$

Por lo tanto,

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}}\left(\sin\sqrt{2} + \cos\sqrt{2}\right)$$

Por otro lado, como $\text{lím}_{|z|\to\infty} \frac{1}{1+z^4} = 0$, el *Lema de Jordan* nos dice que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^4}dz = 0$. Luego, dado que $\displaystyle\int_{-R}^{R} \frac{e^{2iz}}{1+z^4}dz = \int_{\gamma_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^4}dz - \int_{S_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^4}dz$, tenemos:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{2iz}}{1+z^4}dz = \frac{\pi}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}}\left(\sin\sqrt{2} + \cos\sqrt{2}\right)$$

Recordando que $\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-R}^{R} \frac{e^{2iz}}{1+z^4}dz = \int_{0}^{R} \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{1+t^4}dt$, concluimos que

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{1+t^4}dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}}\left(\sin\sqrt{2} + \cos\sqrt{2}\right)$$

(b) Sea $\log : \mathbb{C}\setminus\{xi : x \le 0\} \to \mathbb{C}$ tal que $\log z = \log|z| + i arg(z)$ donde $\log|z|$ es el logaritmo neperiano real, y definimos $arg : \mathbb{C}\setminus\{xi : x \le 0\} \to (\frac{-\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$. De este modo, $\log z$ es holomorfa, y por ende, la función $f(z) = \dfrac{z^2 \log z}{1+z^4}$ es holomorfa en $\mathbb{C}\setminus\{xi : x \le 0\}$ menos en sus cuatro polos simples, que son $e^{\frac{i\pi}{4}}$, $e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $e^{\frac{5\pi i}{4}}$, $e^{\frac{7\pi i}{4}}$.

Consideramos la curva $\gamma_{R,r} = [r; R] \cup S_R \cup [-R; -r] \cup S_r$, orientada en sentido antihorario, donde S_R (resp. S_r) es el arco de circunferencia de radio $R > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (resp. $0 < r < \frac{1}{\sqrt{2}}$) que va R a $-R$ (resp. de $-r$ a r) en el semiplano positivo.

Por el teorema de los residuos, se tiene que $\displaystyle\int_{\gamma_{R,r}} f(z)dz = 2\pi i(Res(f, e^{\frac{i\pi}{4}}) + Res(f, e^{\frac{3i\pi}{4}}))$ pues $Ind_{\gamma_R}(e^{\frac{i\pi}{4}}) = Ind_{\gamma_R}(e^{\frac{3i\pi}{4}}) = 1$ y $Ind_{\gamma_R}(e^{\frac{5i\pi}{4}}) = Ind_{\gamma_R}(e^{\frac{7i\pi}{4}}) = 0$.

Aplicando la fórmula para calcular residuos, obtenemos:

$$Res(f, e^{\frac{i\pi}{4}}) = \lim_{z\to e^{\frac{i\pi}{4}}} (z - e^{\frac{i\pi}{4}})f(z) = \frac{1+i}{16\sqrt{2}}\pi$$
$$Res(f, e^{\frac{3i\pi}{4}}) = \lim_{z\to e^{\frac{3i\pi}{4}}} (z - e^{\frac{i\pi}{4}})f(z) = \frac{1-i}{16\sqrt{2}}3\pi$$

Luego:

$$\int_{\gamma_{R,r}} f(z)dz = \frac{\pi^2(1+2i)}{4\sqrt{2}}$$

A su vez, parametrizando los segmentos con $\alpha : [r, R] \to [r, R]$, $\alpha(x) = x$ y $\beta : [-R, -r] \to [-R, -r]$, $\beta(x) = x$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_{R,r}} f(z)dz &= \int_r^R \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{x^2(\log|x| + i\pi)}{1+x^4} dx + \int_{S_r} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz \\
&= 2\int_r^R \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx + \int_{-R}^{-r} \frac{x^2 i\pi}{1+x^4} dx + \int_{S_r} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int_r^R \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx = \frac{\pi^2(1+2i)}{8\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\left(i\pi \int_{-R}^{-r} \frac{x^2}{1+x^4} dx + \int_{S_r} f(z)dz + \int_{S_R} f(z)dz \right)$$

Ahora, es fácil ver que $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$ y que $\lim_{|z|\to+\infty} zf(z) = 0$, por lo que los lemas de deformación de caminos implican que $\lim_{r\to 0} \int_{S_r} f(z)dz = 0$ y $\lim_{R\to+\infty} \int_{S_R} f(z)dz = 0$.

Finalmente, como $\int_{-R}^{-r} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ y $\int_r^R \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx$ son integrales reales, haciendo tender r a 0 y R a $+\infty$, necesariamente $i\pi \int_{-R}^{-r} \frac{x^2}{1+x^4} dx$ tiende a $Im\left(\frac{\pi^2(1+2i)}{8\sqrt{2}}\right)$, de donde:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx &= Re\left(\frac{\pi^2(1+2i)}{8\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Ejercicio 3

Las soluciones en $D(0,1)$ de la ecuación $e^z = 4z^n$ son los ceros en $D(0,1)$ de la función $f(z) = e^z - 4z^n$. Esta última es holomorfa en $\mathbb{C}$ y no tiene ceros en $\partial D(0,1)$, ya que si $z \in \partial D(0,1)$,

$$|f(z)| \geq ||e^z| - |4z^n|| > 4 - e$$

.

A su vez, la función $g(z) = -4z^n$ también es holomorfa en $\mathbb{C}$ y no tiene ceros en $\partial D(0,1)$.

Finalmente, observando que para $z \in \partial D(0,1)$

$$|f(z) - g(z)| = |e^z| \leq 1 < 4 = |g(z)|$$

podemos concluir, en virtud del *teorema de Rouché*, que f y g tienen la misma cantidad de ceros (contados con multiplicidad) en $D(0,1)$, es decir, n, ya que g tiene un único cero en $z = 0$ de orden n.

Ejercicio 4

(a) Como φ es una primitiva de $1/z$ en A^c, entonces:

$$\varphi(3) - \varphi(-3) = \int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$

para toda curva $\gamma \subset A^c$ que una el -3 con el 3. Tomemos por ejemplo la semicircunferencia parametrizada por $\gamma(t) = 3e^{it}$ con $t \in [\pi, 2\pi]$. Entonces:

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = \int_\pi^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = i\pi \Rightarrow \varphi(3) - \varphi(-3) = i\pi \Rightarrow \varphi(-3) = \varphi(3) - i\pi = 1 - i\pi$$

Calculemos ahora $\int_\gamma \varphi$, siendo γ una curva simple contenida en A^c que une el -3 con el 3. Si $\gamma(t)$ con $t \in [a,b]$ es una parametrización de la curva, entonces:

$$\int_\gamma \varphi(z)\,dz = \int_a^b \varphi\left[\gamma(t)\right]\dot\gamma(t)\,dt = \gamma(t)\varphi\left[\gamma(t)\right]\Big|_a^b - \int_a^b \dot\gamma(t)\,dt = \gamma(b)\varphi\left[\gamma(b)\right] - \gamma(a)\varphi\left[\gamma(a)\right] + \gamma(a) - \gamma(b)$$

donde en la segunda igualdad se integró por partes y se usó que $\varphi'(z) = 1/z$. Usando que $\gamma(a) = -3$, $\gamma(b) = 3$, $\varphi(-3) = 1 - i\pi$ y $\varphi(3) = 1$ resulta:

$$\int_\gamma \varphi(z)\,dz = -3i\pi$$

(b) Escribamos φ como su desarrollo en series de potencias centrado en 3:

$$\varphi(z) = \varphi(3) + \varphi'(3)(z-3) + \frac{\varphi''(3)}{2}(z-3)^2 + \dots$$

Usando que $\varphi(3) = 1$ y que $\varphi'(z) = 1/z$, resulta:

$$\varphi(z) = 1 + \frac{1}{3}(z-3) - \frac{1}{18}(z-3)^2 + \dots = 1 + (z-3)\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{18}(z-3) + \dots\right]$$

Llamando

$$g(z) = \frac{1}{3} - \frac{1}{18}(z-3) + \dots$$

tenemos que:

$$\varphi(z) = 1 + (z-3)g(z) \tag{1}$$

donde g es holomorfa en un entorno de 3 y $g(3) = 1/3$. Así:

$$\varphi(z) - 1 = (z-3)g(z)$$

por lo que $\varphi(z) - 1$ tiene un cero de orden 1 en 3. Si consideramos

$$f(z) = \frac{1}{\left(\varphi^2(z) - 1\right)^2} = \frac{1}{\left(\varphi(z)-1\right)^2\left(\varphi(z)+1\right)^2}$$

entonces f tiene un polo de orden 2 en 3. Usando la igualdad (1) resulta:

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)^2 g^2(z)\left[2 + (z-3)g(z)\right]^2}$$

El residuo de f en 3 puede calcularse como $h'(3)$, siendo $h(z)$ la extensión holomorfa de $(z-3)^2 f(z)$. Así:

$$h(z) = \frac{1}{g^2(z)\left[2 + (z-3)g(z)\right]^2}$$

Derivando obtenemos:

$$h'(z) = -2\frac{g'(z)\left[2 + (z-3)g(z)\right] + g(z)\left[g(z) + (z-3)g'(z)\right]}{g^3(z)\left[2 + (z-3)g(z)\right]^3}$$

Usando que $g(3) = 1/3$ y que $g'(3) = -1/18$, concluimos que $h'(3) = 0$ y por lo tanto el residuo de f en 3 es 0.

Ejercicio 5

(a) Ver teórico.

(b) Si f tiene un cero en a de orden k, entonces existe un disco $D(a,r)$ en el que $f(z)=(z-a)^k g(z)$ con $g\in\mathcal{H}\left(D(a,r)\right)$ y $g(z)\neq 0$ en el disco. Entonces, para $z\in D(a,r)-\{a\}$:

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-a)^k g(z)}$$

Así, como $\frac{1}{f(z)}\to\infty$ cuando $z\to a$, resulta que $1/f$ tiene un polo en a. Además:

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k\frac{1}{f(z)}=\lim_{z\to a}\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{g(a)}\neq 0$$

por lo que el polo es de orden k.

Recíprocamente, si $1/f$ tiene un polo de orden k en a sabemos que $1/f\in\mathcal{H}\left(D(a,r)-\{a\}\right)$ para algún radio r y además:

$$\lim_{z\to a}(z-a)^k\frac{1}{f(z)}=\alpha\neq 0$$

Si definimos en $D(a,r)$:

$$h(z)=\begin{cases}(z-a)^k\frac{1}{f(z)} & \text{si } z\neq a\\ \alpha & \text{si } z=a\end{cases}$$

entonces h es continua en $D(a,r)$ y holomorfa en $D(a,r)-\{a\}$, por lo que es holomorfa en todo el disco. Además, si r es suficientemente chico, h no se anula en $D(a,r)$, por lo que:

$$f(z)=(z-a)^k\frac{1}{h(z)}$$

con $1/h\in\mathcal{H}(D(a,r))$ y $1/h(a)=1/\alpha\neq 0$. Entonces f tiene un cero de orden k en a.

(c) Si f tiene un polo de orden k en a, entonces:

$$\lim_{z\to a}f(z)(z-a)^k=\alpha\neq 0$$

Definiendo:

$$\varphi(z)=\begin{cases}(z-a)^k f(z) & \text{si } z\neq a\\ \alpha & \text{si } z=a\end{cases}$$

resulta que φ es continua en Ω y holomorfa en $\Omega-\{a\}$, por lo que es holomorfa en todo Ω. Entonces:

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^k}$$

con $\varphi\in\mathcal{H}(\Omega)$ y $\varphi(a)=\alpha\neq 0$.

Si ahora se cumple que $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^k}$ con $\varphi\in\mathcal{H}(\Omega)$ y $\varphi(a)\neq 0$, entonces:

$$\lim_{z\to a}f(z)=\infty$$

por lo que f tiene un polo en a. Además:

$$\lim_{z\to a}f(z)(z-a)^k=\varphi(a)\neq 0$$

por lo que el polo es de orden k.